0 Mathematische Notationen¹

0.1 Mengen

0.1.1 Naive Mengendefinition

Eine Menge ist eine Zusammenfassung von bestimmten und wohlunterschiedenen Objekten.

Es gelten die folgenden Aussagen:

$x \in M$: x ist Element von M , x gehört zur Menge M („ x aus M “).

$x \notin M$: x ist nicht Element von M , x gehört nicht zur Menge M .

0.1.2 Mengenschreibweisen

Es gibt die aufzählende und die beschreibende Mengenschreibweise:

aufzählend: $M = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$

Bsp.: $M = \{\text{Merkur, Venus, Erde, Mars}\}$

beschreibend: $M = \{x: x \text{ hat die Eigenschaft } \varepsilon\}$

Bsp.: $M = \{x: x \text{ ist innerer Planet}\}$

0.1.3 Mengenrelationen

$A \subseteq B$ ist eine Teilmengenrelation und bedeutet: A ist Teilmenge von B , A ist Untermenge von B oder B ist Obermenge von A . D. h. jedes $x \in A$ gehört auch zu B .

$B \supseteq A$ bedeutet genau das gleiche wie $A \subseteq B$.

$A = B$ bedeutet: $A \subseteq B$ und $B \subseteq A$.

$\emptyset$ ist die Menge, die kein Element enthält. $\emptyset$ heißt leere Menge. Für jede Menge A ist $\emptyset \subseteq A$.

$P(M) := \{A: A \subseteq M\}$ ist die Potenzmenge von M . Für $M = \{a, b, c\}$ ist

$$P(M) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$$

die Potenzmenge. Für alle Mengen M gilt insbesondere $M \subseteq P(M)$.

0.1.4 Mengenoperationen

Vereinigung:

$$A \cup B = \{x: x \in A \text{ oder } x \in B\}$$

Durchschnitt:

$$A \cap B = \{x: x \in A \text{ und } x \in B\}$$

Für Durchschnitt und Vereinigung gelten folgende Aussagen:

$$A \cap B \subseteq A, B \text{ und } A, B \subseteq A \cup B.$$

Differenz:

$$A \setminus B = \{x: x \in A, x \notin B\}$$

¹Version 190 vom 13. Februar 2006

kartesisches Produkt:

$$A \times B = \{(a, b) : a \in A, b \in B\}$$

Für jedes Paar (a, b) gilt:

$$(a, b) = (a_1, b_1) \Leftrightarrow a = a_1, b = b_1.$$

Sei nun $\Lambda \neq \emptyset$ und zu jedem Element $\lambda \in \Lambda$ sei M_λ Menge. Dann setzt man

$$\bigcup_{\lambda \in \Lambda} M_\lambda = \{x : x \in M_\lambda \text{ für ein } \lambda \in \Lambda\},$$

die Vereinigung der Mengen M_λ und

$$\bigcap_{\lambda \in \Lambda} M_\lambda = \{x : x \in M_\lambda \text{ für jedes } \lambda \in \Lambda\},$$

der Durchschnitt der Mengen M_λ

Bereits bekannte Mengen von Zahlen

Zeichen	Name	Beschreibung
$\mathbb{N}$	Menge der natürlichen Zahlen	$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$
$\mathbb{Z}$	Menge der ganzen Zahlen	$\mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, \dots\}$
$\mathbb{Q}$	Menge der rationalen Zahlen	$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} : p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N} \right\}$

0.2 Abbildungen

Seien A, B Mengen.

0.2.1 Naive Abbildungsdefinition

Eine *Abbildung* oder *Funktion* f von A nach B ist eine Vorschrift, die jedem $a \in A$ ein eindeutig bestimmtes $b \in B$ zuordnet.

Schreibweise:

$$\begin{aligned} f : A &\rightarrow B \\ a &\mapsto f(a) \end{aligned}$$

0.2.2 Graph von f

Sei $f : A \rightarrow B$ eine Abbildung. Dann ist

$$\text{graph } f = \{(a, f(a)) : a \in A\} \subseteq A \times B$$

der *Graph* von f .

0.2.3 Komposition

Sind $f : A \rightarrow B, g : B \rightarrow C$ Abbildungen. Dann heißt

$$g \circ f : A \rightarrow C, (g \circ f)(a) = g(f(a))$$

die *Komposition* „ g nach f “

0.2.4 Definitions- und Wertebereich

Sei $f: A \rightarrow B$ eine Abbildung. Dann heißt A der *Definitionsbereich* und B der *Werte-/Zielbereich* von f .

0.2.5 Bild und Urbild

Für $A_1 \subseteq A$ heißt

$$f(A_1) := \{f(a) : a \in A_1\} \subseteq B$$

Bild von A_1 unter f . Insbesondere ist $f(A)$ das Bild von f .

Für $B_1 \subseteq B$ heißt

$$f^{-1}(B_1) := \{a : f(a) \in B_1\} \subseteq A$$

Urbild von B_1 unter f .

0.2.6 injektiv, surjektiv, bijektiv

Die Funktion $f: A \rightarrow B$ heißt

surjektiv: $f(A) = B$

injektiv: für beliebige $x, y \in A$, $x \neq y$ gilt: $f(x) \neq f(y)$

bijektiv: f ist injektiv und surjektiv

0.2.7 Umkehrfunktion

Ist $f: A \rightarrow B$ injektiv, so gibt es eine Funktion/Abbildung $f^{-1}: f(A) \rightarrow A$ mit $f^{-1}(f(x)) = x$. f^{-1} heißt Umkehrfunktion von f auf $f(A)$. f^{-1} existiert genau dann auf B , wenn f bijektiv ist.

0.3 Elementare Logik

A und B seien Aussagen, wahr oder falsch.

$A \Rightarrow B$ bedeutet: „aus A folgt B “

aus der Gültigkeit der Aussage A

folgt die Gültigkeit von B

A ist *hinreichend* für B

B ist *notwendig* für A

$B \Leftarrow A$ hat genau die gleiche Bedeutung

$A \Leftrightarrow B$ bedeutet: „genau dann“, A und B sind äquivalent

A und B sind zugleich richtig oder falsch

gleichbedeutend: $A \Rightarrow B$, und $A \Leftarrow B$