1 Die reellen Zahlen[1]

1.1 Der Körper $\mathbb{R}$

1.1.1 Definition: $\mathbb{R}$

Es gibt eine Menge $\mathbb{R}$ — die Menge der reellen Zahlen — und darauf sind eine Addition $x+y$ und eine Multiplikation $x \cdot y$ erklärt, so daß folgende Regeln (Axiome) erfüllt sind:
Seien $x, y, z \in \mathbb{R}$ beliebig

1. Assoziativitätsgesetz:
   $(x+y)+z = x+(y+z)$
   $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$

2. Kommutativgesetz:
   $x+y = y+x$
   $x \cdot y = y \cdot x$

3. Existenz von 0 und 1
   Es gibt $0 \in \mathbb{R}$ mit $0+x = x$
   Es gibt $1 \in \mathbb{R}$ mit $1 \cdot x = x$

4. Existenz der Inversen:
   Zu jedem $x \in \mathbb{R}$ gibt es ein $(-x) \in \mathbb{R}$ mit $x+(-x) = 0$
   Zu jedem $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ gibt es ein $x^{-1} \in \mathbb{R}$ mit $x \cdot x^{-1} = 1$

5. Distributivgesetz: $x \cdot (y+z) = x \cdot y + x \cdot z$

1.1.2 Bemerkungen

(1) *Jede* Menge, in der eine Addition und eine Multiplikation erklärt sind, so daß 1–5 gelten, heißt Körper.

(2) z.B. ist $\mathbf{Q}$ ein Körper.

(3) Statt $x+(-y)$ schreibt man $x-y$.
Statt x^{-1} schreibt man $\frac{1}{x}$.
Statt $x \cdot y^{-1}$ schreibt man $\frac{x}{y}$.

1.2 Anordnung von $\mathbb{R}$

1.2.1 Definition

$\mathbb{R}$ ist angeordnet, d. h. es gibt eine Menge $P \subseteq \mathbb{R}$ mit:

1.) Für ein beliebiges $x \in \mathbb{R}$ ist $x = 0$ oder $x \in P$ oder $-x \in P$.

[1] Version 190 vom 13. Februar 2006

2.) Für $x, y \in P$ ist $x + y \in P$.

3.) Für $x, y \in P$ ist $x \cdot y \in P$.

P ist die Menge der positiven reellen Zahlen. Statt $x \in P$ schreibt man auch $x > 0$ oder $0 < x$. $x < y :\Leftrightarrow y - x \in P$, d. h. $y - x > 0 \Leftrightarrow: y > x$

1.2.2 Bemerkungen

(a) $x \in P$ heißt: x ist positiv, $-x \in P$ heißt: x ist negativ.

(b) Jeder Körper mit den Eigenschaften 1.), 2.), 3.) heißt *angeordneter* Körper, z. B. ist $\mathbf{Q}$ angeordnet mit $P = \left\{\frac{p}{q} : p, q \in \mathbb{N}\right\}$

(c) $\mathbb{R}$ wird geometrisch gedeutet als Zahlengerade.

1.2.3 Regeln

Seien $x, y, z, t, u, v \in \mathbb{R}$:

(1) $x < y \Rightarrow x + z < y + z$

(2) $x < y$ und $y < z \Rightarrow x < z$

(3) $x < y$ und $u < v \Rightarrow x + u < y + v$

(4) $x < y$ und $z > 0$ $[z < 0] \Rightarrow xz < yz$ $[xz > yz]$

(5) $x \neq 0 \Rightarrow x^2 = x \cdot x > 0$. Insbesondere ist $1 > 0$

(6) $x < y$ und $0 < t < 1 \Rightarrow x < tx + (1 - t)y < y$. Insbesondere gilt $x < \frac{x+y}{2} < y$

(7) $0 < x < y \Rightarrow \frac{1}{x} > \frac{1}{y}$

1.3 Die Vollständigkeit von $\mathbb{R}$

1.3.1 Definition

Sei $M \subseteq \mathbb{R}$, $M \neq \emptyset$, $\xi \in \mathbb{R}$

(a) ξ heißt *obere* bzw. *untere* Schranke von M, wenn für alle $x \in M$ gilt: $x \leq \xi$ bzw. $x \geq \xi$.

(b) Gibt es eine obere bzw. untere Schranke, so heißt M *nach oben* bzw. *nach unten* beschränkt. Existieren beide Schranken, so heißt M *beschränkt*.

(c) Ist ξ obere bzw. untere Schranke mit $\xi \in M$, so heißt ξ das Maximum $\max M$ bzw. das Minimum $\min M$ von M.

1.3.2 Bemerkung

1. Sei ξ untere Schranke von M.
   Dann ist jede Zahl $\xi' \in \mathbb{R}$ mit $\xi' < \xi$ ebenfalls untere Schranke von M.

2. Sei ξ obere Schranke von M.
   Dann ist jede Zahl $\xi' \in \mathbb{R}$ mit $\xi' > \xi$ ebenfalls obere Schranke von M.

1.3.3 Beispiel

Sei $M = \{x \colon 0 \leq x < 1\}$. Es ist $0 = \min M$ und 1 ist obere Schranke von M, aber $1 \notin M$. $\Rightarrow \max M$ existiert nicht.

1.3.4 Vollständigkeitsaxiom

Jede nach oben beschränkte Menge $M \subseteq \mathbb{R}$ besitzt eine kleinste obere Schranke, das Supremum von M: $\sup M$. Genauso besitzt jede nach unten beschränkte Menge $M \subseteq \mathbb{R}$ eine größte untere Schranke, das Infimum von M: $\inf M$.
Für $\sup M$ bzw. $\inf M$ gilt:

(a) s ist obere bzw. untere Schranke

(b) $\xi < s$ bzw. $\xi > s \Rightarrow$ es existiert $x \in M$ mit $x > \xi$ bzw. $x < \xi$.

Gelten (a) und (b) dann ist $s = \sup M$. bzw. $s = \inf M$.

Beweis: s ist obere Schranke (a)
$\xi < s \underbrace{\Longrightarrow}_{(b)} \xi$ ist keine obere Schranke
$\Rightarrow s$ ist kleinste obere Schranke, also $s = \sup M$.

1.3.5 Beispiel

Sei

$$M = \left\{ \frac{x-y}{x+y} \colon 0 < y < 1,\, 0 < x < y^2 \right\}$$

Es ist

$$x + y > 0 \text{ und } x - y < y^2 - y = y(y-1) < 0$$
$$\Longrightarrow \frac{x-y}{x+y} < 0 = \text{obere Schranke}$$

Behauptung: $\sup M = 0$

Beweis:

(a) $s = 0$ ist obere Schranke.

(b) Sei $-\frac{1}{3} < \xi < 0$, $y = 1 + \xi$ und $x = 1 + 2\xi \Longrightarrow 0 < \frac{2}{3} < y < 1$
$0 < \frac{1}{3} < x = 1 + 2\xi < 1 + 2\xi + \xi^2 = y^2$
Gilt nun

$$\frac{x-y}{x+y} = \frac{\xi}{2+3\xi} > \xi?$$

Es ist

$$2 + 3\xi > 2 + 3\left(-\frac{1}{3}\right) = 1 \Rightarrow \frac{1}{2+3\xi} > 1 \Rightarrow \frac{\xi}{2+3\xi} > \xi$$

(b) ist erfüllt

$\Longrightarrow \sup M = 0 \notin M$

1.3.6 Existenz des Infimums

Jede nach unten beschränkte Menge $M \subseteq \mathbb{R}$ besitzt immer eine größte untere Schranke, das Infimum von M: $\inf M$.

Beweis: Sei M nach unten beschränkt, $N := \{-x | x \in M\}$ $\sup N = -\inf M$

1.3.7 Archimedische Eigenschaft

$\mathbb{N}$ ist nicht nach oben beschränkt.

Beweis: (Indirekter Beweis)
Annahme: $\mathbb{N}$ ist nach oben beschränkt. Damit existiert $\sup \mathbb{N} = s$.
$\Rightarrow s-1$ ist keine obere Schranke. D. h. es gibt $n \in \mathbb{N}$, so daß $n > s-1$ ist. $\Rightarrow n+1 > s$. Widerspruch zu $\sup \mathbb{N} = s$.

1.3.8 Folgerung

$\inf \left\{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \right\} = 0$

Beweis: Das Infimum ist ≥ 0, weil $\frac{1}{n} > 0$ ist für alle $n \in \mathbb{N}$.

(a) 0 ist untere Schranke

(b) Sei $\xi > 0$.
Dann gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $n > \frac{1}{\xi}$. $\Rightarrow \frac{1}{n} < \xi \in \{\dots\} \Rightarrow \inf\{\dots\} = 0$

1.3.9 Satz

Gilt $M \subseteq N$ und ist N nach oben bzw. unten beschränkt, so gilt:

$$\sup M \leq \sup N \text{ bzw. } \inf M \geq \inf N.$$

Beweis: $s = \sup N$ ist insbesondere obere Schranke für N, also auch für M.
$\Rightarrow \sup M \leq s$. Für das Infimum genauso.

1.3.10 Satz

Seien $M, N \subseteq \mathbb{R}$. Setze $-M := \{-x : x \in M\}$ und $M + N := \{x + y : x \in M, y \in N\}$. Dann gilt:

1. $\sup(M + N) = \sup M + \sup N$, falls M und N nach oben beschränkt sind.
2. $\inf(M + N) = \inf M + \inf N$, falls M und N nach unten beschränkt sind.
3. $\sup(-M) = -\inf M$, falls M nach unten beschränkt ist.
4. $\inf(-M) = -\sup M$, falls M nach oben beschränkt ist.

Beweis: von (2):
Setze $m := \inf M$ und $n := \inf N$
$x \in M$, $y \in N \Rightarrow x \geq m$, $y \geq n$
$\Rightarrow x + y \geq m + n$, also ist $m + n$ untere Schranke für $M + N$.
Wähle $\xi > m + n$.
Dann existieren Zahlen $x \in M$ und $y \in N$ mit $x + y < \xi$ $(\xi = \xi_1 + \xi_2, \xi_1 > m, \xi_2 > n)$.
Finde $x \in M$ und $y \in N$, so daß $x < \xi_1$ und $y < \xi_2$ ist. $\Rightarrow m + n = \inf(M + N)$.

1.4 Absolutbetrag

1.4.1 Definition

Für $x \in \mathbb{R}$ heißt

$$|x| := \begin{cases} x & \text{für } x \geq 0 \\ -x & \text{für } x < 0 \end{cases}$$

absoluter Betrag und

$$\operatorname{sign}(x) := \begin{cases} 1 & \text{für } x > 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \\ -1 & \text{für } x < 0 \end{cases}$$

Vorzeichen von x.
Es gelten:

$$x \leq |x|, \quad -x \leq |x|, \quad |x| = \max\{x, -x\}$$

$$x = \operatorname{sign}(x) \cdot |x|, \quad |x| = \operatorname{sign}(x) \cdot x$$

$$|x| < \varepsilon \iff -\varepsilon < x < \varepsilon$$

$$|x| \leq \varepsilon \iff -\varepsilon \leq x \leq \varepsilon$$

1.4.2 Dreiecksungleichung

Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt:

$$|x + y| \leq |x| + |y|$$

$$||x| - |y|| \leq |x - y|$$

Gleichheit gilt genau dann, wenn $x \cdot y \geq 0$ ist.

Beweis:

$$\left.\begin{array}{ll} (1) & x + y \leq |x| + |y| \\ (2) & -(x + y) = -x - y \leq |x| + |y| \end{array}\right\} |x + y| \leq |x| + |y|$$

Gleichheit genau dann, wenn in (1) oder (2) Gleichheit ist.

$$|x| = |(x - y) + y| \leq |x - y| + |y| \Rightarrow |x| - |y| \leq |x - y|$$

$|y| - |x|$ genauso.

1.4.3 Intervalle

Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$. Setze

$$\begin{array}{rcll} (a, b) & = & \{x \colon a < x < b\} & \text{offenes Intervall} \\ [a, b] & = & \{x \colon a \leq x \leq b\} & \text{abgeschlossenes Intervall} \\ [a, b) & = & \{x \colon a \leq x < b\} & \text{halboffene Intervalle} \\ (a, b] & = & \{x \colon a < x \leq b\} & \end{array}$$

1.4.4 Bemerkung

Für jedes dieser Intervalle I ist $\sup I = b$, $\inf I = a$.

Beweis: b ist obere Schranke für I.

$$\begin{aligned} & \xi < b,\ a < \xi < b:\ x = \frac{b+\xi}{2} \\ \Rightarrow\ & \xi < x < b \\ \Rightarrow\ & x \in I \\ \Rightarrow\ & \xi \text{ ist nicht obere Schranke} \end{aligned}$$

1.4.5 Definition

Für $x \in \mathbb{R}$ heißt $[x]$ die größte ganze Zahl$\leq x$, d. h. $[x] = \sup\{n \in \mathbb{Z}\colon n \leq x\}$. Es gilt $[x] \leq x < [x] + 1$.

1.4.6 Satz

In jedem Intervall (a, b) gibt es ein $r \in \mathbf{Q}$ und $s \in \mathbb{R} \setminus \mathbf{Q}$. („$\mathbf{Q}$ und $\mathbb{R} \setminus \mathbf{Q}$ liegen dicht in $\mathbb{R}$“)

Beweis: Für $r \in \mathbf{Q}$ (später in 1.6.5 auf Seite 15 für $s \in \mathbb{R} \setminus \mathbf{Q}$).

- Zunächst: $b - a > 1$
  Setze $r = \begin{cases} [b] & \text{für } b \notin \mathbb{Z} \\ [b] - 1 & \text{sonst} \end{cases}$
- Allgemein: Wähle $q \in \mathbb{N}$ so, daß $q(b - a) > 1$ ist (archimed. Eigenschaft).
  Das Intervall (qa, qb) enthält $p \in \mathbb{Z}$. $\Rightarrow$ (a, b) enthält $\frac{p}{q} \in \mathbf{Q}$,
  denn: $qa < p < qb \Rightarrow a < \frac{p}{q} < b \Rightarrow \frac{p}{q} \in (a, b)$

1.4.7 Erweiterungsmöglichkeiten

Erweiterung von $\mathbb{R}$: Man setzt $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ ($-\infty, \infty$ sind keine Zahlen).
Sinnvolle Relationen und Operationen:

$$-\infty < x < \infty \text{ für alle } x \in \mathbb{R}$$

$$\left.\begin{aligned} x + \infty &= \infty \\ x - \infty &= -\infty \end{aligned}\right\} \text{ für alle } x \in \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned} x \cdot \infty = \infty,\ x \cdot (-\infty) = -\infty \quad & \text{für } x > 0 \\ x \cdot \infty = -\infty,\ x \cdot (-\infty) = \infty \quad & \text{für } x < 0 \end{aligned}$$

$$\frac{x}{\infty} = \frac{x}{-\infty} = 0 \text{ für } x \in \mathbb{R}$$

$$\frac{x}{0} = \infty \text{ für } x > 0,\ \frac{x}{0} = -\infty \text{ für } x < 0$$

Erweiterung des Intervallbegriffs: $(-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R}\colon x \leq b\}$.
Analog sind $(-\infty, b), [a, \infty), (a, \infty), (-\infty, \infty)$

Erweiterung des Supremum-/Infimum-Begriffs:
Ist $M \subseteq \mathbb{R}$, $M \neq \emptyset$ nicht nach oben bzw. unten beschränkt,
so setzt man $\sup M = \infty$ bzw. $\inf M = -\infty$.

1.5 Vollständige Induktion

1.5.1 Induktionsprinzip

Gegeben seien $A(n)$, Aussagen für $n \in \mathbb{N}$.

(1) [Induktionsverankerung/-voraussetzung] $A(1)$ sei wahr.

(2) [Induktionsschritt] Aus der Gültigkeit von $A(n)$ folgt die Gültigkeit von $A(n+1)$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Dann sind alle $A(n)$ wahr.

Beweis: Sei $M = \{n\colon A(n) \text{ falsch}\}$, $1 \neq M$.
$\inf M = m = \min M \Rightarrow A(m)$ ist falsch, $A(m-1)$ ist richtig. Widerspruch zu (2)!

1.5.2 Beispiel

Es ist $1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

Beweis:

I.A.: $1 = \frac{1\cdot 2}{2} = 1$

I.S.: $1 + 2 + \cdots + n + n + 1 = \frac{n(n+1)}{2} + n + 1 = \frac{n(n+1)+2(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$

1.5.3 Induktive Definition von Summe und Produkt

Seien $m, n \in \mathbb{Z}$, $a_\nu \in \mathbb{R}$

$$\sum_{\nu=m}^{n} a_\nu = \begin{cases} 0 & \text{falls } n < m \text{ (leere Summe)} \\ \left(\sum\limits_{\nu=m}^{n-1} a_\nu\right) + a_n & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\prod_{\nu=m}^{n} a_\nu = \begin{cases} 1 & \text{falls } n < m \text{ (leeres Produkt)} \\ \left(\prod\limits_{\nu=m}^{n-1} a_\nu\right) \cdot a_n & \text{sonst} \end{cases}$$

Für $m < n$ gilt:

$$\sum_{\nu=m}^{n} a_\nu =: a_m + a_{m+1} + \cdots + a_n$$

$$\prod_{\nu=m}^{n} a_\nu =: a_m \cdot a_{m+1} \ldots a_n$$

Potenz ($a \in \mathbb{R}$): $a^n := \prod\limits_{\nu=1}^{n} a = \underbrace{a \cdot a \ldots a}_{n-\text{mal}}$ für $n \in \mathbb{N}$
$a^0 = 1$ und $\left[a^n = \frac{1}{a^-n} \text{ für } -n \in \mathbb{N},\ a \neq 0\right]$
Fakultät: $n! := \prod\limits_{\nu=1}^{n} \nu = 1 \cdot 2 \ldots n$ für $n \in \mathbb{N}$, $0! := 1$.

1.5.4 Binomialkoeffizienten

Für $\alpha \in \mathbb{R}$ und $k \in \mathbb{N}_0$ definiert man

$$\binom{\alpha}{k} := \prod_{\nu=1}^{k} \frac{\alpha - \nu + 1}{\nu} \qquad (\alpha \text{ über } k)$$

z. B.: $\binom{\alpha}{0} = 1$

$$k \in \mathbb{N} : \binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{1 \cdot 2 \dots k} = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{k!}$$

$$\binom{\frac{1}{2}}{3} = \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)(\frac{1}{2}-2)}{3!} = \cdots$$

Für $n \in \mathbb{N}_0$ und $k \in \mathbb{N}_0$ ist $\binom{n}{k} = 0$, falls $n < k$.

$$(n \geq k) : \binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!} \cdot \frac{(n-k)!}{(n-k)!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Es ist $\binom{n}{n} = 1$ und $\binom{0}{0} = 1$

1.5.5 Pascalsches Dreieck

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & & 1 & & & & \\ & & & 1 & & 1 & & & \\ & & 1 & & 2 & & 1 & & \\ & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\ 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \end{array}$$

Beweis von $\binom{\alpha}{k} + \binom{\alpha}{k-1} = \binom{\alpha+1}{k}$:

$$\begin{aligned} \binom{\alpha}{k} + \binom{\alpha}{k-1} &= \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{k!} \\ &\quad + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-(k-1)+1)}{(k-1)!} \\ &= \frac{[\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+2)](\alpha-k+1+k)}{k!} \\ &= \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+2)(\alpha+1)}{k!} \\ &= \frac{(\alpha+1)(\alpha+1-1)\dots(\alpha+1-k+1)}{k!} \\ &= \binom{\alpha+1}{k} \end{aligned}$$

$n \geq k$: $\binom{n}{k}$ =Zahl der Möglichkeiten, aus n Objekten k auszuwählen, ohne Bercksichtigung der Reihenfolge („n über k“ = „n choose k“) (engl.)

1.5.6 Binomischer Lehrsatz

Für $a, b \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}_0$ gilt:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

$$2^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$$

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k = 0 \text{ für } n \geq 1$$

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k = (x+1)^n$$

Beweis: Induktion nach n.

- $n = 0$:
$$\begin{aligned} (a+b)^0 &= \sum_{k=0}^{0} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} \\ 1 &= 1 \end{aligned}$$
- $n = 1$:
$$(a+b)^1 = \sum_{k=0}^{1} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$
$$a + b = \binom{1}{0} a^0 b^1 + \binom{1}{1} a^1 b^0$$
$$a + b = b + a$$
- $n \mapsto n+1$:
$$\begin{aligned} (a+b)^{n+1} &= (a+b)(a+b)^n \\ &= (a+b) \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{k+1} b^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k+1} \\ &= \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} a^k b^{n-k+1} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k+1} \\ &= \binom{n}{n+1-1} a^{n+1} b^{n-n-1+1} \\ &\quad + \sum_{k=1}^{n} \left[\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \right] a^k b^{n-k+1} \\ &\quad + \binom{n}{0} a^0 b^{n+1} \\ &= \binom{n}{n} a^{n+1} b^0 \\ &\quad + \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} a^k b^{n-k+1} + \binom{n}{0} b^{n+1} \\ &= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k} \quad \text{q.e.d.} \end{aligned}$$

1.5.7 Nachtrag

$\binom{n}{k} \in \mathbb{N}$, falls $n \geq k$, $n, k \in \mathbb{N}_0$

Beweis: Induktion nach n:

$$n = 0: \binom{0}{0} = 1 \in \mathbb{N}$$

$$n \mapsto n+1: \binom{n+1}{0} = 1 = \binom{n+1}{n+1}$$

$$1 \leq k \leq n: \binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}$$

Nach I.V. werden 2 ganze Zahlen addiert, die eine ganze Zahl ergeben.

1.5.8 Bernoullische Ungleichung

Für $n \in \mathbb{N}$ und $x \geq -1$ gilt:

$$(1+x)^n \geq 1 + nx$$

Gleichheit gilt genau in folgenden Fällen: $n = 1$, $x \geq -1$, bzw. $n > 1$, $x = 0$

Beweis:

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k \underbrace{\geq}_{\text{falls } x \geq 0} \sum_{k=0}^{1} \binom{n}{k} x^k = 1 + nx$$

Induktionsbeweis für $x \geq -1$:

$$\begin{array}{lrcl} n = 1: & (1+x)^1 & = & 1 + 1x \\ n \mapsto n+1: & (1+x)^{n+1} & = & \underbrace{(1+x)}_{\geq 0} \underbrace{(1+x)^n}_{\geq 1+nx} \\ & & \geq & (1+x)(1+nx) \\ & & = & 1 + nx + x + \underbrace{nx^2}_{\geq 0} \\ & & \geq & 1 + (n+1)x \end{array}$$

1.6 Wurzeln

1.6.1 Beispiel

Für $r \in \mathbf{Q}$ ist $r^2 \neq 2$.

Beweis: Annahme: $r = \frac{m}{n}$ erfüllt $r^2 = 2$ (m, n ohne gemeinsamen Teiler, $m, n \in \mathbb{N}$). Es ist dann $m^2 = 2n^2$, also ist $m = 2p$, m ist gerade.
$\Rightarrow 4p^2 = 2n^2 \Rightarrow 2p^2 = n^2 \Rightarrow n = 2q$ ist gerade. Widerspruch!

1.6.2 Satz

Zu jedem $a \geq 0$, $a \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$ gibt es genau ein $\xi \in \mathbb{R}$, $\xi \geq 0$ mit $\xi^n = a$.
Schreibweise: $\xi = \sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$

Beweis der Eindeutigkeit: Sei $0 \leq x < y \Rightarrow x^2 < y^2$, mit Induktion $x^n < y^n$, d. h. $x^n = a$ und $y^n = a$ unmöglich.

Beweis der Existenz: Für $a = 0$, $\xi = 0 \Longrightarrow$ o.k.
Ab jetzt sei $a > 0$. Sei $M = \{x \colon x \geq 0,\ x^n \leq a\}$.
$M \neq \emptyset$, da $0 \in M$. Außerdem ist M nach oben beschränkt durch $s = a + 1$, denn für $x > s = a + 1$ gilt: $x^n > (a + 1)^n > a$, d. h. $x \notin M$.
Behauptung: $\xi = \sup M$. Zeige $\xi^n = a$
Beweis: Sei $1 > \varepsilon > 0$ beliebig. Dann existiert ein $x \in M$, $x > \xi - \varepsilon$
$|a - \xi^n| < \varepsilon(s + 1)^n \Rightarrow a = \xi^n$.

1. $1 > \varepsilon > 0$ beliebig.
   Dann existiert ein $x \in M$, $x > \xi - \varepsilon$

$$\begin{aligned}
\xi^n < (x+\varepsilon)^n &= \underbrace{x^n}_{\leq a} + \sum_{j=1}^{n} \binom{n}{j} \varepsilon^j x^{n-j} \\
&\leq a + \varepsilon \sum_{j=1}^{n} \binom{n}{j} s^{n-1} \\
&< a + \varepsilon(s+1)^n \\
\Rightarrow \xi^n - a &\leq \varepsilon(s+1)^n
\end{aligned}$$

2. $1 > \varepsilon > 0$ beliebig: $x = \xi + \varepsilon \notin M$, $\xi + \varepsilon > 0$
   $\Rightarrow a < (\xi + \varepsilon)^n \leq \cdots \leq \xi^n + \varepsilon(s + 1)$
   $\Rightarrow a - \xi^n \leq \varepsilon(s - 1)^n$

Aus 1.) und 2.) folgt: $|\xi^n - a| \leq \varepsilon(s + 1)^n$, $\varepsilon > 0$ beliebig
$\Rightarrow |\xi^n - a| \leq 0$, also $\xi^n = a$.

1.6.3 Fundamentaler Schluß der Analysis

Ist $b \in \mathbb{R}$ und gilt für jedes (hinreichend kleine) ε: $b \leq \varepsilon \Rightarrow b \leq 0$

Beweis: indirekt, Annahme $b > 0$: Wähle $\varepsilon \leq \frac{b}{2}$, $\varepsilon > 0:\ b \leq \varepsilon \leq \frac{\varepsilon}{2}$ W!

1.6.4 Bemerkung

$\mathbf{Q}$ ist nicht vollständig

Beweis: Wenn $\mathbf{Q}$ vollständig wäre, so ex. $\xi = \sup\{x \in \mathbf{Q} :\ x \geq 0,\ x^2 \leq 2\}$ in $\mathbf{Q}$. $\Rightarrow$ wie oben $\xi^2 = 2$. $\sqrt{2} \notin \mathbf{Q}$. Widerspruch!

1.6.5 Nachtrag

Jedes Intervall (a, b) enthält ein $s \in \mathbb{R} \setminus \mathbf{Q}$.

Beweis: (a, b) enthält $r_1, r_2 \in \mathbf{Q}$, $r_1 < r_2$.
$(\sqrt{2} \cdot r_1, \sqrt{2} \cdot r_2)$ enthält $r \in \mathbf{Q}$,
d. h. $\sqrt{2} \cdot r_1 < r < \sqrt{2} \cdot r_2 :\ a < r_1 < \frac{r}{\sqrt{2}} = s < r_2 < b$
$\Rightarrow s \in (a, b)$, $s = \frac{r}{2} \cdot \sqrt{2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbf{Q}$

1.6.6 Allgemeine Potenz

Sei $a > 0$, $r = \frac{p}{q} \in \mathbf{Q}$. Dann gilt: $a^r := \sqrt[q]{a^p}$. Diese Definition ist unabhängig von der Darstellung $r = \frac{p}{q}$

Beweis:
Sei $\xi = \sqrt[n]{a}$.
Dann ist

$$(\xi^n)^m = a^m$$

und

$$\xi^{nm} = (\xi^m)^n = \left(\left(\sqrt[n]{a}\right)^m\right)^n$$

also gilt:

$$(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$$

Setze $r = \frac{p}{q} = \frac{m}{n}$, $m = kp$, $n = kq$.
Dann ist

$$(\sqrt[kq]{a})^{kp} = \sqrt[kq]{a^{kp}} = \sqrt[q]{a^p} = a^r$$

$a^0 = 1$
$a^r = \sqrt[q]{a^p} = (\sqrt[q]{a})^p$, falls $\frac{q}{p} = r$, $q \in \mathbb{N}$, $p \in \mathbb{Z}$

1.6.7 Regeln für Potenzen

Seien $a, b > 0$, $r, s \in \mathbf{Q}$. Dann gilt:

$$a^r a^s = a^{r+s}, \qquad \frac{a^r}{a^s} = a^{r-s}, \qquad a^r b^r = (ab)^r$$

1.6.8 Ungleichung zwischen dem arithmetischen und geometrischen Mittel (AGM)

Sind $a_1, \dots, a_n \geq 0$, so gilt

$$\underbrace{\underbrace{\sqrt[n]{a_1 \dots a_n}}_{\text{geometrisches}} \leq \underbrace{\frac{a_1 + \dots + a_n}{n}}_{\text{arithmetisches}}}_{\text{Mittel}}$$

„=“ genau dann, wenn $a_1 = \dots = a_n$ ist.

Beweis: für $a_j = 0 \Rightarrow$ o.k.
Seien jetzt alle $a_j > 0$, $a = \frac{a_1 + \dots + a_n}{n} > 0$
$\alpha_j = \frac{a_j}{a}$: $\alpha_1 + \dots + \alpha_n = n$
Gilt $\alpha_1 \cdots \alpha_n \leq 1$?

1.6.9 Hilfssatz

Sind $\alpha_1, \dots, \alpha_n > 0$ mit $\alpha_1 + \dots + \alpha_n = n$,
so gilt: $\alpha_1 \cdots \alpha_n \leq 1$ und „=“ genau dann, wenn $\alpha_1 = \dots = \alpha_n$

Beweis:

- $n = 2$: $\alpha_1 = 1 - s \leq 1$
  $\alpha_2 = 1 + s \geq 1$
  $\alpha_1 \alpha_2 = (1-s)(1+s) = 1 - s^2 \leq 1$
  $= 1$, genau dann, wenn $s = 0 \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = 1$

- $n \mapsto n+1$: $\alpha_1 + \dots + \alpha_n + \alpha_{n+1} = n+1$
  z. B. sei $\alpha_n = 1 - s \leq 1$ und $\alpha_{n+1} = 1 + t \geq 1$
  (sonst wird umnumeriert)
  $\beta_1 = \alpha_1, \dots, \beta_{n-1} = \alpha_{n-1}, \beta_n = \alpha_n + \alpha_{n+1} > 0$
  $\beta_1 + \dots + \beta_n = n + 1 - 1$

$$\begin{aligned} \alpha_1\alpha_2\dots\alpha_{n+1} &= \underbrace{\beta_1\dots\beta_{n-1}\beta_n}_{\leq 1}\frac{\alpha_n\alpha_{n+1}}{\beta_n} \\ &\leq 1 \cdot \frac{(1-s)(1+t)}{1-s+t} \\ &= \frac{1-s+t-\overbrace{s\cdot c}^{\geq 0}}{1-s+t} \\ &\leq \frac{1-s+t}{1-s+t} = 1 \end{aligned}$$

„=“ genau dann, wenn $\beta_1 \dots \beta_n = 1$ und $st = 0$
$\iff$ $\beta_1 = \dots = \beta_n = 1$ und $st = 0$
$\iff$ $\alpha_1 = \dots = \alpha_{n-1} = 1$, $\alpha_n + \alpha_{n+1} = 2$ und $s = 0 \vee t = 0$

$$s = 0: \ \alpha_n = 1, \ \alpha_{n+1} = 2 - 1 = 1$$

$$t = 0: \ \alpha_{n+1} = 1, \ \alpha_n = 2 - 1 = 1$$

Beweis (AGM) Fortsetzung:

$$a_1 \dots a_n = \alpha_1 \dots \alpha_n a^n \underbrace{\leq}_{*} a^n = \left(\frac{a_1 + \dots + a_n}{n}\right)^n$$

$$\iff \sqrt[n]{a_1 \dots a_n} \leq \frac{a_1 + \dots + a_n}{n}$$

Gleichheit, wenn Gleichheit bei $*$ $\iff$ $\alpha_1 = \dots = \alpha_n = 1$, d. h. alle $a_j = a$.

1.6.10 Beispiel

Sei $a > 0$, $r = \frac{p}{q} \in (0,1)$
Dann gilt: $a^r \leq 1 + r(a-1)$ (z. B.: $a = 1 + x: \ (1+x)^r \leq 1 + rx$ für $0 < r < 1$)

Beweis:

$$\begin{aligned} a^r = \sqrt[q]{a^p} &= \sqrt[q]{\underbrace{a\dots a}_{p\text{-mal}} \cdot \underbrace{1\dots 1}_{q-p\text{-mal}}} \\ &\underbrace{\leq}_{AGM} \frac{a + \dots a + 1 + \dots 1}{q} \\ &= \frac{pa + (q-p)}{q} = 1 + r(a-1) \end{aligned}$$