

2 Folgen und Reihen¹

2.1 Konvergente Folgen

2.1.1 Definition: Folge

Eine Folge (a_n) ist eine Abbildung $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$, $n \mapsto a_n$. Sie heißt *konvergent* gegen $a \in \mathbb{R}$, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt mit: $|a_n - a| < \varepsilon$ für alle $n \geq n_0$. Schreibweise: $a_n \rightarrow a$ ($n \rightarrow \infty$) oder $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$

2.1.2 Bemerkungen

- (a) Manchmal betrachtet man Folgen (a_n) , die für $n \geq p$ definiert sind, mit $p \in \mathbb{Z}$ fest.
- (b) Nicht konvergente Folgen heißen *divergent*.
- (c) Gilt $a_n \rightarrow 0$, ($n \rightarrow \infty$), so heißt (a_n) *Nullfolge*.
- (d) Gilt $a_n \rightarrow a$, ($n \rightarrow \infty$), so heißt a *Grenzwert* oder *Limes* der Folge (a_n) .
- (e) Der Grenzwert einer konvergenten Folge ist eindeutig bestimmt.
- (f) Es gilt $a_n \rightarrow a$ für $n \rightarrow \infty$ genau dann, wenn es eine Nullfolge (b_n) gibt mit $|a_n - a| \leq b_n$ für alle n .

Beweis:

- (e) Gelte $a_n \rightarrow a$, $a_n \rightarrow b$
Sei $\varepsilon > 0$: $\exists n_0 : |a_n - a| < \varepsilon$ ($n \geq n_0$)
 $\exists n_0 : |a_n - b| < \varepsilon$ ($n \geq n_0$)
 $|a - b| = |(a - a_n) - (b - a_n)| \leq |a - a_n| + |b - a_n| < \varepsilon + \varepsilon \Rightarrow |a - b| < 2\varepsilon \Rightarrow a = b$
- (f) (Andeutung)
„ $\Rightarrow$ “: $b_n := |a_n - a|$, zeige $b_n \rightarrow 0$.
„ $\Leftarrow$ “: $|a_n - a| \leq b_n$ ($n \rightarrow \infty$)

2.1.3 Rechenregeln für konvergente Folgen

- (1) Der Grenzwert ist eindeutig bestimmt.
- (2) Konvergente Folgen sind beschränkt, d. h. es existiert ein $k > 0$ mit $|a_n| \leq k$ für alle n . D. h. $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ ist beschränkt.
- (3) Aus $a_n \rightarrow a$ folgt $\lambda a_n \rightarrow \lambda a$ ($\lambda \in \mathbb{R}$).
- (4) Aus $a_n \rightarrow a$ und $b_n \rightarrow b$ folgt $a_n + b_n \rightarrow a + b$.
- (5) Aus $a_n \rightarrow a$ und $b_n \rightarrow b$ folgt $a_n \cdot b_n \rightarrow a \cdot b$.

¹Version 191 vom 13. Februar 2006

2 Folgen und Reihen

- (6) Aus $b_n \rightarrow b$, $b \neq 0$ folgt $b_n \neq 0$ für $n \geq p$ und $\frac{1}{b_n} \rightarrow \frac{1}{b}$.
- (7) Aus $a_n \rightarrow a$, $b_n \rightarrow b$, $b \neq 0$ folgt $\frac{a_n}{b_n} \rightarrow \frac{a}{b}$.
- (8) Aus $a_n \leq b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, $a_n \rightarrow a$, $b_n \rightarrow b$ folgt $a \leq b$.
- (9) Aus $a_n \leq b_n \leq c_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, $a_n \rightarrow a$, $c_n \rightarrow a$ folgt $b_n \rightarrow a$.
- (10) Aus $a_n \rightarrow a > 0$ folgt $a_n^r \rightarrow a^r$ ($r \in \mathbf{Q}$)
 $[r \in \mathbb{N}: a \in \mathbb{R} \text{ beliebig; } r \in \mathbb{Z}: a \neq 0 \text{ beliebig; } r > 0: a = 0, a_n \geq 0]$

Beweis:

- (1) siehe oben unter (e)

- (2) Gelte $a_n \rightarrow a$:

Zu $\varepsilon = 1$ ex. n_0 mit $|a_n - a| < \varepsilon = 1$,

$$|a_n| = |(a_n - a) + a| \leq |a_n - a| + |a| < 1 + |a| \text{ für } n \geq n_0.$$

$$|a_n| \leq \max\{|a_1|, \dots, |a_{n_0}|, |a| + 1\} =: k \text{ für alle } n \in \mathbb{N}$$

- (3) $\lambda = 0 \Rightarrow$ o. k.

$\lambda \neq 0$: Zu jedem $\varepsilon > 0$ ex. n_0 mit $|a - a_n| < \frac{\varepsilon}{|\lambda|}$ für alle $n \geq n_0$.

$$\Rightarrow |\lambda a_n - \lambda a| = |\lambda| \cdot |a_n - a| < |\lambda| \cdot \frac{\varepsilon}{|\lambda|} = \varepsilon \text{ für alle } n \geq n_0,$$

d. h. $\lambda a_n \rightarrow \lambda a$.

- (4) Gelte $a_n \rightarrow a$, $b_n \rightarrow b$:

Sei $\varepsilon > 0$: Dazu ex. n_0 mit $|a - a_n| < \frac{\varepsilon}{2}$ und $|b - b_n| < \frac{\varepsilon}{2}$ für alle $n \geq n_0$.

$$\begin{aligned} |(a_n + b_n) - (a + b)| &= |(a_n - a) + (b_n - b)| \\ &\leq |a_n - a| + |b_n - b| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \text{ für alle } n \geq n_0 \end{aligned}$$

- (5) Gelte $a_n \rightarrow a$, $b_n \rightarrow b$:

(a_n) und (b_n) sind beschränkt mit $|a_n| \leq A$, $|b_n| \leq B$ für alle n

$$\begin{aligned} |a_n \cdot b_n - a \cdot b| &= |(a_n - a)b_n + a(b_n - b)| \\ &\leq |b_n(a_n - a)| + |a(b_n - b)| \\ &\leq \underbrace{B \overbrace{|a_n - a|}^{\text{NF}}}_{\text{NF nach (3)}} + \underbrace{|a| \overbrace{|b_n - b|}^{\text{NF}}}_{\text{NF nach (3)}} \\ &\quad \underbrace{\hspace{10em}}_{\text{NF nach (4)}} \end{aligned}$$

also: $a_n b_n \rightarrow ab$

- (6) Gelte $b_n \rightarrow b$, $b \neq 0$:

Zu $\varepsilon = \frac{|b|}{2} > 0$ ex. ein p mit: $|b_n - b| < \varepsilon = \frac{|b|}{2}$ für $n \geq p$

$$|b_n| = |(b_n - b) + b| \geq |b| - |b_n - b| > |b| - \frac{|b|}{2} = \frac{|b|}{2} > 0 \text{ für } n \geq p$$

$$\left| \frac{1}{b_n} - \frac{1}{b} \right| = \left| \frac{b - b_n}{b_n b} \right| \leq \frac{|b - b_n|}{\frac{|b|}{2} |b|} = \frac{2}{b^2} |b - b_n| \rightarrow 0 \text{ (} n \rightarrow \infty \text{)}$$

d. h. $\frac{1}{b_n} \rightarrow \frac{1}{b}$.

$$(7) \quad \frac{a_n}{b_n} = a_n \cdot \underbrace{\frac{1}{b_n}}_{\text{def. für } n \geq p} \rightarrow a \cdot \frac{1}{b} \text{ nach (5) und (6)}$$

$$(8) \quad a_n < b_n \text{ für alle } n:$$

$$\varepsilon > 0 : |a_n - a| < \varepsilon \quad (n \geq n_0)$$

$$|b_n - b| < \varepsilon \quad (n \geq n_0)$$

$$a - b = \underbrace{a - a_n}_{< \varepsilon} + \underbrace{a_n - b_n}_{\leq 0} + \underbrace{b_n - b}_{< \varepsilon} < 2\varepsilon \quad (n \geq n_0)$$

$$\Rightarrow a - b \leq 0, a \leq b$$

$$(9) \quad (\text{„Sandwich-Theorem“})$$

$$|c_n - a_n| = c_n - a_n = (c_n - a) - (a_n - a) = \text{Nullfolge}$$

$$|b_n - a_n| = b_n - a_n \leq c_n - a_n = \text{Nullfolge}$$

$$\Rightarrow b_n - a = \underbrace{b_n - a_n}_{\text{NF}} + \underbrace{a_n - a}_{\text{NF}} = \text{NF}$$

$$\Rightarrow b_n \rightarrow a$$

$$(10) \quad \bullet \text{ Sei } r \in \mathbb{N}: \text{ Induktion.}$$

$$r = 1 : (\text{o. k.: } a_n \rightarrow a)$$

$$r \mapsto r + 1 : a_n^{r+1} = a_n \cdot a_n^r \rightarrow a \cdot a^r = a^{r+1}$$

$$\bullet \text{ Sei } -r \in \mathbb{N} \text{ und } a \neq 0:$$

$$\text{Dann existiert } a_n \neq 0 \text{ für } n \geq p$$

$$a_n^r = \frac{1}{a_n^{-r}} \xrightarrow{1. \text{ Teil und (6)}} \frac{1}{a_n^{-r}} = a^r.$$

$$r = 0 : a_n^0 = 1 \rightarrow 1 = a^0.$$

$$\bullet \quad r = \frac{1}{q}, q \in \mathbb{N} : a > 0, a_n > 0$$

$$\alpha_n = \sqrt[q]{a_n} = a_n^{\frac{1}{q}}, \alpha = \sqrt[q]{a}$$

$$\begin{aligned} a_n - a &= \alpha_n^q - \alpha^q \\ &= |(\alpha_n - \alpha)(\alpha_n^{q-1} + \alpha_n^{q-2}\alpha + \dots + \alpha^{q-1})| \\ &\geq |\alpha_n - \alpha| \cdot \alpha^{q-1} \\ \left| a_n^{\frac{1}{q}} - a^{\frac{1}{q}} \right| &\leq \frac{|a_n - a|}{\alpha^{q-1}} \end{aligned}$$

$$\bullet \quad r = \frac{p}{q}, p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}$$

$$\alpha, \alpha_n \text{ werden wie vorher definiert.}$$

$$a_n^r - a^r = a_n^{\frac{p}{q}} - a^{\frac{p}{q}} = \alpha_n^p - \alpha^p$$

$$\text{Da } \alpha_n \rightarrow \alpha \text{ folgt } \alpha_n^p \rightarrow \alpha^p \text{ (siehe oben, } r \in \mathbb{N})$$

$$\text{d. h.: } a_n^r \rightarrow a^r$$

$$\Rightarrow a_n^r \rightarrow a^r \text{ für } r \in \mathbb{Q}, a, a_n > 0$$

$$r > 0, a = 0, a_n \geq 0 :$$

$$\text{Zu } \varepsilon > 0 \text{ existiert ein } n_0 : |a_n| < \varepsilon^{\frac{1}{r}} \quad (n \geq n_0)$$

$$|a_n^r| < (\varepsilon^{\frac{1}{r}})^r = \varepsilon \quad (n \geq n_0), \text{ d. h. } a_n^r \rightarrow 0 = 0^r$$

2.1.4 Beispiele

1. Beh.: $\sqrt[n]{n} \rightarrow 1 \quad (n \rightarrow \infty)$ Beweis: $\sqrt[n]{n} = 1 + h_n, \quad h_n \geq 0$

$$\begin{aligned}
 n &= (1 + h_n)^n \stackrel{\text{bin. Satz}}{=} \underbrace{1 + \binom{n}{1}h_n + \binom{n}{2}h_n^2 + \cdots + \binom{n}{n}h_n^n}_{\text{alle Terme} \geq 0} \\
 &\geq 1 + \frac{n(n-1)}{2}h_n^2
 \end{aligned}$$

$$n \geq 2: h_n^2 \leq \frac{n-1}{n(n-1)} = \frac{1}{n}$$

$$0 \leftarrow 0 \leq h_n \leq \sqrt{\frac{1}{n}} \rightarrow 0 \quad n \geq 2, n = 1$$

$$\Rightarrow h_n \rightarrow 0$$

$$\Rightarrow \sqrt[n]{n} = 1 + h_n \rightarrow 1 + 0 = 1$$

2. Beh.: $a^n \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$, falls $|a| < 1$

$$\text{Beweis: } |a| = \frac{1}{(1+h)^n} \leq \frac{1}{1+nh} < \frac{1}{h} \cdot \frac{1}{n}$$

$$\Rightarrow |a|^n \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

Gilt $a^n \rightarrow 0$? Allgemeiner (Satz (11)): Wenn $b_n \rightarrow b \Rightarrow |b_n| \rightarrow |b|$

$$\text{Beweis: } ||b_n| - |b|| \leq |b_n - b| \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

$$\text{Umkehrung gilt für } b = 0: |b_n - b| = |b_n - 0| = |b_n| \rightarrow 0$$

3. Beh.: $a_n = \sqrt[n]{a} \rightarrow 1$, falls $a > 0$ Beweis: Wähle m so, daß $a < m$ und $\frac{1}{a} < m$.

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{m} < a < m : n \geq m &\Rightarrow \frac{1}{n} < a < n \text{ gilt nur für } n \geq m \\
 &\Rightarrow 1 \leftarrow \sqrt[n]{\frac{1}{n}} < \sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{n} \rightarrow 1 \\
 &\Rightarrow \sqrt[n]{a} \rightarrow 1
 \end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned}
 n \left(\sqrt{n^2 + 1} - n \right) &= n \frac{\sqrt{n^2 + 1} - n}{1} \cdot \frac{\sqrt{n^2 + 1} + n}{\sqrt{n^2 + 1} + n} \\
 &= n \frac{n^2 + 1 - n^2}{\sqrt{n^2 + 1} + n} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{n^2}} + 1} \rightarrow \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

2.2 Monotone Folgen

2.2.1 Definition

Eine Folge (a_n) heißt *monoton wachsend* [fallend], wenn $a_n \leq a_{n+1}$ [$a_n \geq a_{n+1}$]Eine Folge (a_n) heißt *streng wachsend* [fallend], wenn $a_n < a_{n+1}$ [$a_n > a_{n+1}$]kurz: $a_n \uparrow, a_n \downarrow$

2.2.2 Monotoniekriterium

Ist (a_n) monoton (wachsend oder fallend) und beschränkt, so ist sie auch konvergent. Es gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \begin{cases} \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\} & \text{falls } a_n \uparrow \\ \inf\{a_n : n \in \mathbb{N}\} & \text{falls } a_n \downarrow \end{cases}$$

Beweis: Für $a_n \uparrow$. Sei $a = \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$

Sei $\varepsilon > 0$: Damit existiert n_0 mit $a_{n_0} > a - \varepsilon$

Für $n \geq n_0 \Rightarrow a - \varepsilon < a_{n_0} \leq a_n \leq a$

$|a_n - a| < \varepsilon$ für $n \geq n_0$

d. h. $a_n \rightarrow a$.

Bemerkung: $a_n \uparrow [a_n \downarrow] \Rightarrow a_n \geq a_1 [a_n \leq a_1]$

Eine monotone Folge ist einseitig beschränkt.

2.2.3 Aufgabe

Sei $b_0 > a_0 > 0$, $a_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}$ und $b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}$

Zeige: $a_n \uparrow$, $b_n \downarrow$, $a_n < b_n$ und

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = M(a_0, b_0)$$

2.2.4 3 Beispiele

$$1. e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{-n} = 2.718 \dots$$

Zeige mehr: $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, $n \geq 1$

$$b_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n-1} \quad n \geq 2$$

$$a_n < a_{n+1} < b_{n+1} < b_n$$

$$a_n \uparrow, b_n \downarrow, a_1 \leq a_n \leq b_1, a_1 \leq b_n \leq b_1$$

Beweis:

$$\begin{aligned} a_n &= \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \\ &= \underbrace{\left(1 + \frac{1}{n}\right) \cdots \left(1 + \frac{1}{n}\right)}_{n\text{-mal}} \cdot 1 \\ &\stackrel{\text{AGM}}{\leq} \left(\frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right) + \cdots + \left(1 + \frac{1}{n}\right) + 1}{n+1}\right)^{n+1} \\ &= \left(\frac{n+1 + n \frac{1}{n}}{n+1}\right)^{n+1} \\ &= \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} = a_{n+1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{b_n} &= \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot 1 \\
 &\stackrel{\text{AGM}}{\leq} \left(\frac{\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \cdots + \left(1 - \frac{1}{n}\right) + 1}{n+1}\right)^{n+1} \\
 &= \left(\frac{n+1-1}{n+1}\right)^{n+1} \\
 &= \frac{1}{b_{n+1}}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 n \geq 2: \quad \frac{a_n}{b_n} &= \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \\
 &= \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n < 1 \\
 \Rightarrow a_n &< b_n
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} b_n \text{ existieren} \\
 \frac{a_n}{b_n} &= \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) > 1 - \frac{1}{n^2} = 1 - \frac{1}{n} \\
 \Rightarrow b_n \left(1 - \frac{1}{n}\right) &< a_n < \underbrace{b_n}_{\rightarrow b} \\
 \Rightarrow a_n &\rightarrow b
 \end{aligned}$$

2. Newton-Verfahren zur Berechnung der Wurzel $\sqrt[p]{a}$, $a > 0$, $p \geq 2$ ganz.

$$a_0 > 0 \text{ beliebig, } a_{n+1} = \frac{(p-1)a_n^p + a}{pa_n^{p-1}}$$

Behauptung: $a_n \rightarrow \sqrt[p]{a}$

Zeige mehr:

$$1) \quad a_n \geq 0 \text{ (Aufgabe für uns)}$$

$$2) \quad a_n^p \geq a \text{ für } n \geq 1$$

$$3) \quad a_n \downarrow \text{ und } a_n > 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha \text{ existiert}$$

Beweis:

2)

$$\begin{aligned}
 a_{n+1}^p &= \left(\left(1 - \frac{1}{p}\right)a_n + \frac{a}{pa_n^{p-1}}\right)^p \\
 &= a_n^p \left(1 - \frac{1}{p} \left(1 - \frac{a}{a_n^p}\right)\right)^p \\
 &\stackrel{\text{Bernoulli}}{\geq} \left(1 - p \cdot \frac{1}{p} \left(1 - \frac{a}{a_n^p}\right)\right) a_n^p \\
 &= a_n^p \frac{a}{a_n^p} = a
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 3) \quad a_{n+1} - a_n &= \frac{(p-1)a_n^p + a}{pa_n^{p-1}} - a_n = \overbrace{\frac{a - a_n^p}{pa_n^{p-1}}}^{\leq 0} \leq 0 \\
 \text{d. h.: } a_{n+1} &\leq a_n
 \end{aligned}$$

$$\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \text{ existiert} = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\overbrace{(p-1) a_n^p}^{\rightarrow \alpha^p} + a}{\underbrace{p a_n^{p-1}}_{\rightarrow \alpha^{p-1}}}$$

$$\alpha = \frac{(p-1)\alpha^p + a}{p\alpha^{p-1}} \iff -\alpha^p + a = 0 \iff \alpha = \sqrt[p]{a}, \text{ da } \alpha > 0$$

3. $0 < a_0 < \frac{1}{2}, a_{n+1} = a_n^2 + \frac{1}{4}$
 Zeige: $0 < a_n < \frac{1}{2}$
 $n = 0 : \text{o. k.}$

$$n \mapsto n+1 : a_{n+1} = a_n^2 + \frac{1}{4} \quad \left(\geq \frac{1}{4} > 0 \right)$$

$$\leq \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= a_n^2 + \frac{1}{4} - (a_{n-1}^2) + \frac{1}{4} \\ &= a_n^2 - a_{n-1}^2 \\ &= (a_n - a_{n-1}) \underbrace{(a_n + a_{n-1})}_{>0} \end{aligned}$$

(a_n) ist monoton. Für uns die Aufgabe: in welche Richtung $\uparrow \downarrow$?

$$\begin{aligned} \alpha &= \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n^2 + \frac{1}{4} = \alpha^2 + \frac{1}{4} \\ \iff \alpha &= \alpha^2 + \frac{1}{4} \\ \iff \left(\alpha - \frac{1}{2} \right)^2 &= 0 \\ \Rightarrow \alpha &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

2.3 Teilfolgen

2.3.1 Definition

Sei (a_n) eine Folge. Ist (n_k) eine streng monoton wachsende Folge in $\mathbb{N}$ ($n_k \in \mathbb{N}, n_k < n_{k+1}$), dann heißt (a_{n_k}) eine *Teilfolge* von (a_n) ($k \rightarrow a_{n_k}$). $a \in \mathbb{R}$ heißt Häufungswert von (a_n) , wenn es eine Teilfolge (a_{n_k}) gibt mit $a_{n_k} \rightarrow a$ für $k \rightarrow \infty$.

2.3.2 Beispiele

1. $a_n \rightarrow a$ konvergiert, a ist einziger Häufungswert:
 $a_{n_k} \rightarrow a$ für jede (n_k) .

Beweis: $\varepsilon > 0 : |a_n - a| < \varepsilon$ für $n \geq m_0$

Wähle k_0 so, daß $n_{k_0} \geq m_0$:

$$k \geq k_0 \Rightarrow n_k \geq n_{k_0} \geq m_0 : |a_{n_k} - a| < \varepsilon$$

2. $a_n = (-1)^n + \frac{1}{n}$
 $a_{2k} = 1 + \frac{1}{2k} \rightarrow 1 \quad (k \rightarrow \infty)$
 $a_{2k+1} = -1 + \frac{1}{2k+1} \rightarrow -1 \quad (k \rightarrow \infty)$
 Die Häufungswerte sind $-1, 1$.

- 3.

$$1 < a_0 \leq 2 : a_{n+1} = \begin{cases} 4a_n & \text{falls } a_n \leq 4 \\ \frac{1}{2}a_n & \text{falls } a_n > 4 \end{cases}$$

$(a_0, 4a_0, 2a_0, 8a_0, 4a_0, \dots)$
 Häufungswerte sind $2a_0, 4a_0, 8a_0$

2.3.3 Satz von Bolzano-Weierstraß

Jede beschränkte Folge (a_n) besitzt mindestens eine konvergente Teilfolge, d. h. mindestens einen Häufungswert.

(Zu-)Satz: (a_n) enthält eine monotone Teilfolge, und besitzt einen größten und einen kleinsten Häufungswert.

Beweis: (von Polya)

$m \in \mathbb{N}$ heißt Gipfelpunkt, wenn für alle $n > m$ $a_n < a_m$ ist.

1. Fall: Es gibt unendlich viele Gipfelpunkte $m_1 < m_2 < \dots$

(a_{m_k}) ist streng monoton fallend, beschränkt.

$\lim_{k \rightarrow \infty} a_{m_k} =: \bar{a}$ existiert

Sei (a_{n_k}) eine konvergente Teilfolge mit $a_{n_k} \rightarrow a$

Für $n_j \geq m_1$ existiert dann m_{k_j} mit $m_{k_j} \leq n_j < m_{k_j+1}$.

Damit gilt: $a \leftarrow a_{n_j} \leq a_{m_{k_j}} \rightarrow \bar{a}$

$\Rightarrow a \leq \bar{a}$ $\bar{a}$ ist größter Häufungswert.

2. Fall: Es gibt nur endlich viele (oder gar keine) Gipfelpunkte.

$\Rightarrow \exists$ Gipfelpunkt m_1 mit $m_1 >$ alle Gipfelpunkte.

Wähle $m_2 > m_1$ minimal aus, so daß $a_{m_2} \geq a_{m_1}$ ist. m_2 ex., da m_1 kein Gipfelpunkt ist.

Wähle $m_3 > m_2$ minimal aus, so daß $a_{m_3} \geq a_{m_2}$ ist. m_3 ex., da m_2 kein Gipfelpunkt ist.

$\vdots$ usw.

$(a_{m_k}) \uparrow$ und ist beschränkt.

$\Rightarrow (a_{m_k})$ ist konvergent, also $a_{m_k} \rightarrow \bar{a}$ (Häufungswert).

Sei a irgendein Häufungswert mit $a_{n_j} \rightarrow a$ für $(j \rightarrow \infty)$. Zu j mit $n_j > m_1$ ex. ein $k_j : m_{k_j} \leq n_j < m_{k_j+1}$

$a \leftarrow a_{n_j} \leq a_{m_{k_j+1}} \rightarrow \bar{a}$

$a < \bar{a}$ $\bar{a}$ ist größter Häufungswert

Beweis für den kleinsten Häufungswert: selber machen über $(-a_n)$.

2.3.4 Cauchysches Konvergenzkriterium

Eine Folge (a_n) heißt *Cauchyfolge*, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein n_0 gibt, so daß für alle $n > m \geq n_0$ gilt: $|a_n - a_m| < \varepsilon$. Jede Cauchyfolge in $\mathbb{R}$ ist auch eine konvergente Folge, und umgekehrt.

Beweis:

- „ $\Leftarrow$ “: Sei $a_n \rightarrow a$ ($n \rightarrow \infty$)
 $\varepsilon > 0$: es existiert $n_0 : |a_n - a| < \varepsilon$ für alle $n > n_0$
 $n > m \geq n_0 : |a_n - a_m| \leq |a_n - a| + |a_m - a| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$
- „ $\Rightarrow$ “: (a_n) Cauchyfolge.
 $\varepsilon = 1 : |a_n - a_m| < 1$ für $n > m \geq n_0$
 $\Rightarrow |a_n| = |(a_n - a_{n_0}) + a_{n_0}| \leq 1 + |a_{n_0}|$ für $n \geq n_0$
 (a_n) ist beschränkt.
 (a_n) hat konvergente Teilfolge, $a_{n_k} \rightarrow a$.

$\varepsilon > 0$: Dann ex. k_0 : $|a_{n_k} - a| < \varepsilon$ für $k \geq k_0$

Es ex. n_0 : $|a_n - a_m| < \varepsilon$ für $n > m \geq n_0$

$|a_n - a| = |a_n - a_{n_k} + a_{n_k} + a| \leq |a_n - a_{n_k}| + |a_{n_k} + a| < 2\varepsilon$
für $n \geq n_0, k \geq k_0, n_k \geq n_0$

$\Rightarrow a_n \rightarrow a$

2.3.5 Definition: Limes superior, Limes inferior

Sei (a_n) eine beschränkte Folge.

Der größte Häufungswert heißt *oberer Limes* oder *limes superior*,

kurz: $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n$ oder $\overline{\lim} a_n$.

Der kleinste Häufungswert heißt *unterer Limes* oder *limes inferior*,

kurz: $\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n$ oder $\underline{\lim} a_n$.

2.3.6 Bemerkungen

(a) (a_n) ist konvergent $\iff \overline{\lim} a_n = \underline{\lim} a_n$.

(b) $\overline{\lim} a_n = \bar{a}$ ist charakterisiert durch:

Für jedes $\varepsilon > 0$ gilt:

(i) $a_n > \bar{a} + \varepsilon$ gilt nur für endlich viele n .

(ii) $a_n > \bar{a} - \varepsilon$ gilt für unendlich viele n .

(c) $\underline{\lim} a_n = \underline{a}$ ist charakterisiert durch:

für jedes $\varepsilon > 0$ gilt:

(i) $a_n < \underline{a} - \varepsilon$ gilt nur für endlich viele n .

(ii) $a_n < \underline{a} + \varepsilon$ gilt für unendlich viele n .

Beweis: (von (b))

„ $\Leftarrow$ “: Sei $\bar{a} = \overline{\lim} a_n$.

$\bar{a}$ ist der größte Häufungswert von (a_n) , d. h. es gibt keinen größeren Häufungswert, d. h. es gilt (i).

Da $\bar{a}$ Häufungswert ist, existiert (a_{n_k}) mit $a_{n_k} \rightarrow \bar{a}$.

Zu $\varepsilon > 0$ ex. k_0 mit $|\bar{a} - a_{n_k}| < \varepsilon$ für $k \geq k_0$.

„ $\Rightarrow$ “: $\bar{a} \in \mathbb{R}$ erfülle (i) und (ii).

Sei $\varepsilon > 0$:

1. $\Leftarrow$ kein Häufungswert von (a_n) ist $\geq \bar{a} + \varepsilon$.

Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, ist kein Häufungswert $> \bar{a}$, also sind alle $\leq \bar{a}$.

2. Für unendlich viele n gilt $a_n > \bar{a} - \varepsilon$.

Es gibt also einen Häufungswert $\geq \bar{a} - \varepsilon$.

Also gibt es einen Häufungswert $\geq \bar{a}$.

Aus (i) und (ii) folgt: $\bar{a} = \overline{\lim} a_n$.

2.3.7 Beispiel

Sei $a_n = \sqrt[n]{2^n + 3^{n+(-1)^n n}}$. Setze $n = 2m$. Dann gilt

$$\begin{aligned} a_{2m} &= \sqrt[2m]{2^{2m} + 3^{2m+2m}} \\ &= \sqrt[2m]{2^{2m} + 3^{4m}} \\ &= 9 \sqrt[2m]{1 + \underbrace{\left(\frac{2}{9}\right)^{2m}}_{\rightarrow 0}} \rightarrow 9 \end{aligned}$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{\rightarrow 1}$

für $n = 2m + 1$ gilt:

$$\begin{aligned} a_{2m+1} &= \sqrt[2m+1]{2^{2m+1} + 3^0} \\ &= \sqrt[2m+1]{2^{2m+1} + 1} \\ &= 2 \sqrt[2m+1]{1 + \frac{1}{2^{2m+1}}} \rightarrow 2 \end{aligned}$$

Es ist $\overline{\lim} a_n = 9$, $\underline{\lim} a_n = 2$ und es existieren keine anderen Häufungswerte.

2.3.8 Rechenregeln

(1) Aus $a_n \leq b_n$ für alle n folgt: $\underline{\lim} a_n \leq \underline{\lim} b_n$ und $\overline{\lim} a_n \leq \overline{\lim} b_n$

(2)

$$\begin{aligned} \underline{\lim} a_n + \underline{\lim} b_n &\stackrel{(i)}{\leq} \underline{\lim} (a_n + b_n) \\ &\leq \overline{\lim} (a_n + b_n) \\ &\stackrel{(ii)}{\leq} \overline{\lim} a_n + \overline{\lim} b_n \end{aligned}$$

Wenn eine der beiden Folgen konvergiert, so gilt „ $=$ “ in (i) und (ii)

(3) $\underline{\lim}(-a_n) = -\overline{\lim} a_n$ und $\overline{\lim}(-a_n) = -\underline{\lim} a_n$

Beweis: als Aufgabe.

2.3.9 Ergänzungen

Sei (a_n) eine beliebige Folge.

(a) $a_n \rightarrow \infty$ [$a_n \rightarrow -\infty$] oder $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ [$-\infty$] bedeutet folgendes:

Zu jedem $K > 0$ gibt es ein n_0 mit $a_n > K$ [$a_n < -K$] für alle $n \geq n_0$. (Man sagt: (a_n) *divergiert* gegen ∞ .)

(b) ∞ [$-\infty$] ist Häufungswert von (a_n) , wenn es eine Teilfolge (a_{n_k}) gibt, die mit $a_{n_k} \rightarrow \infty$ [$-\infty$] divergiert.

- (c) $\overline{\lim} a_n = \infty [-\infty]$, wenn $\infty [-\infty]$ Häufungswert ist, d. h. wenn die Folge nicht nach oben [unten] beschränkt ist.
- (d) $\overline{\lim} a_n = -\infty$, wenn $a_n \rightarrow -\infty$, beziehungsweise $\underline{\lim} a_n = +\infty$, wenn $a_n \rightarrow +\infty$.

2.3.10 Satz

Sei (a_n) eine beschränkte Folge, $\alpha_n := \sup\{a_m : m \geq n\}$, $\beta_n := \inf\{a_m : m \geq n\}$.
Dann gilt folgendes: $\alpha_n \downarrow, \beta_n \uparrow$ beschränkt, und

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n &= \overline{\lim} a_n \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n &= \underline{\lim} a_n\end{aligned}$$

Beweis: für (α_n) : Sei $\bar{a} = \overline{\lim} a_n$, $M_n = \{a_m : m \geq n\}$

$$M_{n+1} \subseteq M_n \Rightarrow \alpha_{n+1} \leq \alpha_n$$

es gibt $K : |a_n| \leq K$ für alle n , also insbesondere $a_n \leq K$ für alle n , K ist obere Schranke für $M_n, \alpha_n \leq K$

(genauso: $+a_n \geq -K$, also $\alpha_n \geq -K$)

$$\begin{aligned}a_n \in M_n &\Rightarrow a_n \leq \alpha_n \\ &\Rightarrow \bar{a} \leq \overline{\lim} \alpha_n \\ &\Rightarrow \boxed{\bar{a} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n}\end{aligned}$$

Sei $\varepsilon > 0$: Dann gilt für alle $n \geq n_0 : a_n < \bar{a} + \varepsilon$

$$\begin{aligned}n \geq n_0 &\Rightarrow \alpha_n \leq \bar{a} + \varepsilon \\ &\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n \leq \bar{a} + \varepsilon \\ &\Rightarrow \boxed{\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n \leq \bar{a}}\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = \overline{\lim} a_n.$$

2.4 Unendliche Reihen

2.4.1 Definition

Sei $(a_n)_{n \geq 0}$ eine Folge und $s_n := \sum_{k=0}^n a_k$.

Die Folge (s_n) heißt *unendliche Reihe*. Schreibweise: $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$

Die unendliche Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ heißt *konvergent*, wenn $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s$ existiert. s heißt dann *Wert* der

Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k = s$.

s_n heißt n -te Partialsumme von $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$.

Nicht konvergente Reihen nennt man divergent.

2.4.2 Beispiel: Die geometrische Reihe

Die geometrische Reihe ist $\sum_{k=0}^{\infty} a^k$ ($a \in \mathbb{R}$ gegeben).

für $|a| < 1$ ist $\sum_{k=0}^{\infty} a^k = \frac{1}{1-a}$, für $|a| \geq 1$ ist diese Reihe divergent.

Beweis: Es ist

$$\begin{aligned} s_n &= 1 + a + a^2 + \cdots + a^n \\ &= 1 + a(1 + a + \cdots + a^{n-1} + a^n - a^n) \\ &= 1 + as_n - a^{n+1} \\ \Rightarrow (1-a)s_n &= 1 - a^{n+1} \\ \Rightarrow s_n &= \frac{1 - a^{n+1}}{1-a}, \quad a \neq 1 \\ s_n &= n+1, \quad a = 1 \end{aligned}$$

$$|a| < 1 : a^{n+1} \rightarrow 0, s_n \rightarrow \frac{1}{1-a}$$

$$|a| > 1 : |a|^{n+1} \rightarrow \infty, (s_n) \text{ nicht konvergent,}$$

auch für $a = 1$ und $a = -1$ (bei $a = -1$ ist $s_0 = 1, s_1 = 0, s_2 = 1$).

2.4.3 Beispiel: Teleskopsumme

$$b_n \rightarrow 0, \quad a_n = b_n - b_{n+1}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = b_0 = \sum_{n=0}^{\infty} (b_n - b_{n+1}) \quad (\text{„Teleskopsumme“})$$

Beweis:

$$\begin{aligned} s_n &= (b_0 - b_1) + (b_1 - b_2) + \cdots + (b_{n-1} - b_n) + (b_n - b_{n+1}) \\ &= b_0 - b_{n+1} \rightarrow b_0 \end{aligned}$$

Beispiel für eine Teleskopsumme:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2 - n} : \quad \frac{1}{n^2 - n} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} a_n = \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right) = \frac{1}{0+1} = 1$$

2.4.4 Beispiel: erweiterte Teleskopsumme

Sei $b_n \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$ und $p \in \mathbb{N}$ fest.

$a_n = b_n - b_{n+p}$. Dann gilt $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = b_0 + b_1 + \cdots + b_{p-1}$.

Beweis:

$$\begin{aligned}
s_n &= b_0 - b_p + b_1 - b_{p+1} + \cdots + b_n + b_{n+p} \\
&= b_0 + b_1 + \cdots + b_{p-1} - (b_{n+1} + \cdots + b_{n+p}) \\
&\rightarrow b_0 + b_1 + \cdots + b_{p-1}
\end{aligned}$$

Beispiel für eine erweiterte Teleskopsumme

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+3)} = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+3} = \frac{1}{2}(b_0 + b_1) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4}$$

Hier ist $b_n = \frac{1}{n+1}$ und $p = 2$ **2.4.5 Satz über den Reihenrest**

Ist $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ konvergent, so gilt: $a_n \rightarrow 0$ und $r_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$. r_n heißt *Reihenrest*.

Beweis:

$$a_n = s_n - s_{n-1} \rightarrow s - s = 0$$

$$r_n = s - s_n \rightarrow s - s = 0.$$

2.4.6 Cauchy Kriterium

Die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ konvergiert genau dann, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein n_0 gibt mit: $\left| \sum_{k=m+1}^n a_k \right| = |s_n - s_m| < \varepsilon$ für alle $n > m \geq n_0$.

Beweis: $s_n = \sum_{k=0}^{\infty} a_k$ (s_n) konvergiert $\iff$ zu jedem $\varepsilon > 0$ ex. ein n_0 mit

$$\left| \sum_{k=m+1}^n a_k \right| = |s_n - s_m| < \varepsilon$$

für alle $n > m \geq n_0$ **2.4.7 Beispiel: Die harmonische Reihe**Die harmonische Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ divergiert.**Beweis:**

$$\sum_{k=m+1}^{2m} \frac{1}{k} = \frac{1}{m+1} + \frac{1}{m+2} + \cdots + \frac{1}{2m} > m \frac{1}{2m} = \frac{1}{2}$$

Da es für $\varepsilon < 1/2$ kein n_0 mehr gibt $\Rightarrow$ Divergenz nach Cauchy Kriterium.

2.4.8 Hilfssatz: Abelsche partielle Summation

$$\sum_{k=m}^n a_k b_k = a_n B_n + \sum_{k=m}^{n-1} (a_k - a_{k+1}) B_k, \quad (B_k = \sum_{j=m}^k b_j)$$

Beweis:

$$\begin{aligned} \sum_{k=m}^n a_k b_k &= \sum_{k=m}^n a_k (B_k - B_{k-1}) \\ &= \sum_{k=m}^n a_k B_k - \sum_{k=m}^n a_k B_{k-1} \\ &= \sum_{k=m}^n a_k B_k - \sum_{k=m-1}^{n-1} a_{k+1} B_k \\ &= a_n B_n + \sum_{k=m}^{n-1} (a_k - a_{k+1}) B_k - a_m \underbrace{B_{m-1}}_{=0} \end{aligned}$$

2.4.9 Dirichlet-Kriterium

Es sei (a_k) eine monoton fallende Nullfolge, (b_k) eine Folge mit beschränkten Partialsummen (d. h. $\left| \sum_{k=0}^n b_k \right| \leq B$ für alle n). Dann konvergiert $\sum_{k=0}^{\infty} a_k b_k$.

Beweis: Setze

$$B_k = \sum_{j=0}^k b_j.$$

Dann ist

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=m+1}^n a_k b_k \right| &= \left| \underbrace{a_n}_{\geq 0} (B_n - B_m) + \sum_{k=m+1}^{n-1} \underbrace{(a_k - a_{k+1})}_{\geq 0} (B_k - B_m) \right| \\ &\leq |(B_n - B_m)| a_n + \sum_{k=m+1}^{n-1} |B_k - B_m| (a_k - a_{k+1}) \\ &\leq 2B \left(a_n + \sum_{k=m+1}^{n-1} (a_k - a_{k+1}) \right) \\ &= 2B(a_n + a_{m+1} - a_n) \\ &= 2Ba_{m+1} \end{aligned}$$

$\varepsilon > 0$: Man wähle n_0 so, daß $a_{m+1} < \frac{\varepsilon}{2B}$ für alle $m \geq n_0$

$$\left| \sum_{k=m+1}^n a_k b_k \right| < 2B \frac{\varepsilon}{2B} = \varepsilon \quad \text{für } n > m \geq n_0$$

$\Rightarrow$ konvergent nach Cauchy Kriterium.

2.4.10 Leibniz-Kriterium

Es sei (a_k) eine monoton fallende Nullfolge. Dann konvergiert die alternierende Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k a_k$. Ihr Wert liegt zwischen s_{2n} und s_{2n+1} für alle n .

Beweis: Setze $b_k = (-1)^k$ und $B_k = \sum_{j=0}^k b_j$. Es ist $B_k = 0$ oder $B_k = 1$, d. h. B_k ist beschränkt, also konvergiert

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k a_k.$$

$$\begin{aligned} s_{2n+2} - s_{2n} &= (-1)^{2n+2} a_{2n+2} + (-1)^{2n+1} a_{2n+1} \\ &= a_{2n+2} - a_{2n+1} \leq 0 \quad s_{2n} \downarrow \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} s_{2n+1} &= s_{2n} + (-1)^{2n+1} a_{2n+1} \\ &= s_{2n} - a_{2n+1} \leq s_{2n} \end{aligned}$$

$$s_1 \leq s_3 \leq s_5 \leq \dots \leq s \leq \dots \leq s_4 \leq s_2 \leq s_0$$

2.4.11 Die alternierende harmonische Reihe (1)

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \quad \text{konvergiert nach Leibnizkriterium.}$$

$$\begin{aligned} \text{z. B. } s_{100} &= 0,688\dots \\ s_{101} &= 0,698\dots \end{aligned}$$

2.4.12 Rechenregeln für konvergente Reihen

Sind $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$, $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ konvergent, $c \in \mathbb{R}$, so gilt:

$$\sum_{k=0}^{\infty} (ca_k) = c \sum_{k=0}^{\infty} a_k$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} (a_k + b_k) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k + \sum_{k=0}^{\infty} b_k$$

Beweis: Dies hier sind Folgen von Partialsummen

2.4.13 Die alternierende harmonische Reihe (2)

$$1 - 1/2 + 1/3 - 1/4 + 1/5 - 1/6 + 1/7 - 1/8 + 1/9 - + \dots$$

Reihenwert s : $s < 1 - 1/2 + 1/3 = 5/6$

Umordnung von $\frac{(-1)^{k-1}}{k}$: $1 + 1/3 - 1/2 + 1/5 + 1/7 - 1/4 + 1/9 + 1/11 - 1/6 + \dots$ hier: $s > 5/6$, d. h. Umordnungen bei Reihen können den Reihenwert verändern

2.5 Absolute Konvergenz

2.5.1 Definition

Die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ heißt *absolut konvergent*, wenn die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$ konvergiert.

Beispiel:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \quad \text{konvergent, aber nicht absolut}$$

2.5.2 Satz

Jede absolut konvergente Reihe ist auch konvergent

Beweis:

$$\varepsilon > 0. \quad \left| \sum_{k=m+1}^n a_k \right| \leq \sum_{k=m+1}^n |a_k| < \varepsilon \quad \text{für alle } n > m \geq n_0,$$

also Konvergenz nach Cauchy Kriterium

2.5.3 Majorantenkriterium

Gilt $|a_k| < c_k$ für alle k , und ist $\sum_{k=0}^{\infty} c_k$ konvergent, dann ist $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ absolut konvergent. (Man nennt $\sum_{k=0}^{\infty} c_k$ eine *Majorante* für $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$!)

Beweis:

$$\sum_{k=0}^n |a_k| \leq \sum_{k=0}^n c_k \leq \sum_{k=0}^{\infty} c_k$$

Beispiel: $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ konvergiert:

$$a_k = \frac{1}{k^2} \quad a_k = \frac{1}{k^2} < \frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} = c_k \quad (k \geq 2)$$

$$a_1 = 1 = c_1$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k = 1 + \sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right) = 1 + 1 = 2$$

2.5.4 Wurzelkriterium

Gilt $\overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|} < 1$, so konvergiert $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ absolut.

Beweis: Wähle q so, daß $\overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|} < q < 1$ ist. Dann ist für $n \geq n_0$

$$\sqrt[n]{|a_n|} \leq q \quad \text{für } n \geq n_0.$$

Damit ist $|a_n| \leq q^n$ für $n \geq n_0$ bzw.

$$|a_n| \leq C \cdot q^n$$

für alle n . Dabei wird C geeignet gewählt. Setze nun $c_n = C \cdot q^n$. Damit ist

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n$$

als geometrische Reihe eine konvergente Majorante.

2.5.5 Quotientenkriterium

Gilt $a_n \neq 0$ für alle n und ist $\overline{\lim} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < 1$, so ist $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ absolut konvergent.

Beweis: Wähle q so, daß $\overline{\lim} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < q < 1$

$$\Rightarrow \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \leq q \quad \text{für } n \geq n_0$$

Multipliziere diese Werte nun für $n = n_0, n_0 + 1, \dots, m - 1$ auf:

$$\prod_{k=n_0}^{m-1} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| \leq q^{m-n_0}$$

Ausgeschrieben ist dies:

$$\left| \frac{a_{n_0+1}}{a_{n_0}} \cdot \frac{a_{n_0+2}}{a_{n_0+1}} \cdots \frac{a_{m-1}}{a_{m-2}} \cdot \frac{a_m}{a_{m-1}} \right| = \left| \frac{a_m}{a_{n_0}} \right| \leq q^{m-n_0}$$

$$|a_m| \leq |a_{n_0}| q^{-n_0} q^m \quad \text{für } m > n_0$$

$$\overline{\lim}_{m \rightarrow \infty} \sqrt[m]{|a_m|} \leq q \cdot \overline{\lim}_{m \rightarrow \infty} \sqrt[m]{|a_{n_0}| q^{-n_0}} = q < 1$$

2.5.6 Beispiele

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{n^\alpha q^n}_{a_n}$ ist absolut konvergent für $\alpha \in \mathbb{R}$ und $|q| < 1$

Beweis Wurzelkriterium:

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{n^\alpha} \cdot |q| \rightarrow |q| < 1$$

$$\overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|} = |q| < 1$$

- (2) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!}$ konvergiert absolut, für $a \in \mathbb{R}$

Beweis: $a = 0$ o.k.

$$a \neq 0 : \quad \frac{a^n}{n!} \neq 0 \quad \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = |a| \cdot \frac{1}{n+1} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

$$\overline{\lim} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = 0$$

- (3) Die Binomische Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} a^n$ ist absolut konvergent für $\alpha \in \mathbb{R}$ und $|a| < 1$.

Beweis:

$$a_n = a^n \cdot \frac{\alpha(\alpha-1) \cdots (\alpha-n)}{n!}$$

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \left| a \frac{1}{n+1} \frac{\alpha(\alpha-1) \cdots (\alpha-n)}{\alpha(\alpha-1) \cdots (\alpha-n+1)} \right|$$

$$= |a| \underbrace{\frac{1}{n+1} |\alpha-n|}_{\rightarrow 1} \rightarrow |a| < 1$$

Sonderfälle: $a = 0$ trivial, $\alpha \in \mathbb{N}_0$: endliche Summe.

2.5.7 Satz

Für $p \in \mathbb{N}, p \geq 2$ hat jedes $a \in \mathbb{R}$ eine Darstellung der Form

$$a = \text{sign}(a) \left([|a|] + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{p^n} \right)$$

mit $a_n \in \{0, 1, \dots, p-1\}$. Diese Darstellung ist eindeutig, wenn man „ $a_n = p-1$ für $n \geq n_0$ “ verbietet.

Beweis: für $0 < a < 1$.

$$\begin{aligned} \text{setze } a_1 &= [pa], r_1 = a - \frac{a_1}{p} \\ a_2 &= [p^2 r_1], r_2 = r_1 - \frac{a_2}{p^2} \\ a_3 &= [p^3 r_2], r_3 = r_2 - \frac{a_3}{p^3} \\ &\vdots \\ a_n &= [p^n r_{n-1}], r_n = r_{n-1} - \frac{a_n}{p^n} \end{aligned}$$

$$a = \frac{a_1}{p} + r_1 = \frac{a_1}{p} + \frac{a_2}{p^2} + r_2 = \frac{a_1}{p} + \frac{a_2}{p^2} + \cdots + \frac{a_n}{p^n} + r_n =$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{a_k}{p^k}$$

Mit Induktion: $a_n \in \{0, 1, \dots, p-1\}$, $0 \leq r_n \leq p^{-n}$, $r_n \geq r_{n+1}$

n=0:

$$a_0 := 0, r_0 := a, \text{ d.h. } 0 < r_0 < 1 = p^{-0}$$

$$r_1 = a - \frac{a_1}{p} \leq 0$$

n→n+1: $a_{n+1} = [p^{n+1}r_n] \geq 0$, da $r_n \geq 0$

$$\text{da } r_n < p^{-n} \Rightarrow p^{n+1}r_n < p^{n+1}p^{-n} = p$$

$$\Rightarrow a_{n+1} < p, \text{ also } a_{n+1} \leq p-1.$$

$$r_{n+1} = r_n - \underbrace{\frac{a_{n+1}}{p^{n+1}}}_{\geq 0} \leq r_n$$

$$\begin{aligned} 0 \leq p^{n+1}r_{n+1} &= p^{n+1}r_n - a_{n+1} \\ &= p^{n+1}r_n - [p^{n+1}r_n] < 1 \end{aligned}$$

$$0 \leq r_{n+1} < \frac{1}{p^{n+1}}$$

Eindeutigkeit:

$$a = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{p^k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k}{p^k}$$

Annahme: Es gibt verschiedene Darstellungen.

Dann ex. m : $a_k = b_k$ für $1 \leq k < m$, $a_m \neq b_m$, z.B. Sei $a_m > b_m$

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k - b_k}{p^k} = \frac{\overbrace{a_m - b_m}^{\geq 1}}{p^m} + \sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{\overbrace{a_k - b_k}^{\geq -(p-1)}}{p^k} \\ &\geq \frac{1}{p^m} - (p-1) \sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{1}{p^k} \\ &= \frac{1}{p^m} - (p-1) \frac{1}{p^{m+1}} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{p^j} \\ &= \frac{1}{p^m} - \frac{1}{p^{m+1}} (p-1) \frac{1}{1-1/p} = 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow a_m - b_m = 1, a_k - b_k = -(p-1) \text{ für } k > m :$$

$$a_k = 0, b_k = p-1 \text{ für } k > m$$

2.5.8 Satz

$\mathbb{R}$ ist überabzählbar. Eine Menge ist endlich oder unendlich: Eine unendliche Menge M , heißt *abzählbar*, wenn es eine injektive Abbildung von M auf $\mathbb{N}$ gibt, sonst heißt sie *überabzählbar*

Beweis: Annahme: $\mathbb{R}$ ist abzählbar

$$]0, 1[\cap \mathbb{R} = \{x_1, x_2, x_3, \dots\}$$

$$x_n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_{n,k}}{10^k} \text{ („eindeutige“ Darstellung)}$$

$$a_n = \begin{cases} 8, & \text{wenn } a_{n,n} = 0 \\ 0, & \text{wenn } a_{n,n} \neq 0 \end{cases}$$

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{10^k} \in]0, 1[, \text{ d.h. } x = x_m \text{ für ein } m$$

$$\Rightarrow a_k = a_{m,k} \text{ für alle } k$$

Widerspruch: die neue Zahl ist nicht in der Menge von oben.

2.6 Mehrfachreihen

Bisher wurden Reihen der Form $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ betrachtet.

Dabei war die Summationsreihenfolge vorgegeben und wesentlich. Hier im Abschnitt 2.6:

- allgemeine Reihen, etwa $\sum_{i,j=0}^{\infty} a_{i,j}$
- Zusammenhang zwischen „absoluter Konvergenz“ und „Umordnen der Reihe“

2.6.1 Definition

Sei Λ eine beliebige Indexmenge und für jedes $\lambda \in \Lambda$ sei ein $a_\lambda \geq 0$ gegeben.

Für jede *endliche* Menge $E \subseteq \Lambda$ sei $S(E) := \sum_{\lambda \in E} a_\lambda$ (dabei ist $s(\emptyset) = 0$).

Falls $\{S(E) | E \subseteq \Lambda \text{ endlich}\}$ beschränkt ist, so sei

$$S(\Lambda) \equiv \sum_{\lambda \in \Lambda} a_\lambda := \sup\{S(E) : E \subseteq \Lambda \text{ endlich}\}$$

2.6.2 Beispiel

Sei $a_k \geq 0$ und $\sum_{k=0}^{\infty} a_k < \infty$. Hier also: $\Lambda = \mathbb{N}_0$.

Dann ist

$$\sum_{\lambda \in \Lambda} a_\lambda \equiv \sum_{k \in \mathbb{N}_0} a_k = \sum_{k=0}^{\infty} a_k$$

Beweis: Sei $E \subseteq \Lambda$ beliebig, endlich. Dann existiert ein n mit $E \subseteq \{0, 1, 2, \dots, n\}$

$$\Rightarrow S(E) = \sum_{k \in E} a_k \leq \sum_{k=0}^n a_k \leq \sum_{k=0}^{\infty} a_k$$

$$\text{d. h. } \sum_{\lambda \in \Lambda} a_\lambda \equiv \sum_{k \in \mathbb{N}_0} a_k \text{ ist wohldefiniert und ist } \leq \sum_{k=0}^{\infty} a_k$$

noch z. z.: $\sum_{k=0}^{\infty} a_k \leq \sum_{k \in \mathbb{N}_0} a_k$

$$\begin{aligned} s_n &:= \sum_{k=0}^n a_k = s(E) \leq \sum_{k \in \mathbb{N}_0} a_k \\ &\Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} a_k \leq \sum_{k \in \mathbb{N}_0} a_k \end{aligned}$$

2.6.3 Folgerung

Ist $a_k \geq 0$ und $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ konvergent und $\varphi : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}_0$ bijektiv, dann konvergiert auch

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_{\varphi(k)} \text{ mit dem Wert } \sum_{k=0}^{\infty} a_k$$

Bemerkung: Die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_{\varphi(k)}$ heißt „Umordnung“

Beweis:

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k = \sum_{k \in \mathbb{N}_0} a_k = \sum_{\varphi(k) \in \mathbb{N}_0} a_{\varphi(k)} = \sum_{k=0}^{\infty} a_{\varphi(k)}$$

2.6.4 Umordnungssatz

Ist $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ absolut konvergent und $(a_{\varphi(k)})$ eine beliebige Umordnung von (a_k) , dann ist auch $\sum_{k=0}^{\infty} a_{\varphi(k)}$ absolut konvergent und es ist

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_{\varphi(k)} = \sum_{k=0}^{\infty} a_k$$

Schreibweise: Für $c \in \mathbb{R}$ sei $c^+ := \max(c, 0)$ und $c^- := \max(-c, 0)$
Damit gilt: $c = c^+ - c^-$ sowie $c^+ \leq |c|$, $c^- \leq |c|$

Beweis: Da $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ absolut konvergiert und $a_k^+ \leq |a_k|$, $a_k^- \leq |a_k|$ gilt:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} a_k^+, \sum_{k=0}^{\infty} a_k^- &\text{ konvergieren} \\ &\Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} a_{\varphi(k)}^{\pm} = \sum_{k=0}^{\infty} a_k^{\pm} \\ &\Rightarrow \sum_{k=0}^n a_k = \sum_{k=0}^n a_k^+ - \sum_{k=0}^n a_k^- \\ &\xrightarrow{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{\infty} a_k^+ - \sum_{k=0}^{\infty} a_k^- = \sum_{k=0}^{\infty} a_{\varphi(k)}^+ - \sum_{k=0}^{\infty} a_{\varphi(k)}^- \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \sum_{k=0}^n a_{\varphi(k)} &= \sum_{k=0}^n a_{\varphi(k)}^+ - \sum_{k=0}^n a_{\varphi(k)}^- \\ &\xrightarrow{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{\infty} a_{\varphi(k)}^+ - \sum_{k=0}^{\infty} a_{\varphi(k)}^- = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \end{aligned}$$

2.6.5 Hilfssatz

Sei $\Lambda = \bigcup_{j=0}^{\infty} \Lambda_j$ mit $\Lambda_j \cap \Lambda_k = \emptyset$ für $j \neq k$. Dann gilt:

$$\sum_{j=0}^{\infty} \left(\sum_{\lambda \in \Lambda_j} a_{\lambda} \right) = \sum_{\lambda \in \Lambda} a_{\lambda}$$

Beweis: Zuerst „ $\leq$ “: Es ist

$$\sum_{\lambda \in \Lambda_j} a_{\lambda} \leq \sum_{\lambda \in \Lambda} a_{\lambda} \leq \infty.$$

$\varepsilon > 0$: Wähle zu jedem $j = 0, 1, 2, \dots$ eine endliche Menge $E_j \subseteq \Lambda_j$ mit

$$S(E_j) > \sum_{\lambda \in \Lambda_j} a_{\lambda} - \varepsilon \cdot 2^{-j}$$

$E = E_0 \cup E_1 \cup \dots \cup E_n \subseteq \Lambda$ endlich.

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^n \sum_{\lambda \in \Lambda_j} a_{\lambda} &< \sum_{j=0}^n S(E_j) + \sum_{j=0}^n \varepsilon \cdot 2^{-j} \\ &= S(E) + \varepsilon \sum_{j=0}^n 2^{-j} \\ &\leq \sum_{\lambda \in \Lambda} a_{\lambda} + \varepsilon \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2} \right)^j \\ &= \sum_{\lambda \in \Lambda} a_{\lambda} + 2\varepsilon \end{aligned}$$

$$\text{d. h.: } \sum_{j=0}^n \sum_{\lambda \in \Lambda_j} a_{\lambda} \leq \sum_{\lambda \in \Lambda} a_{\lambda} + 2\varepsilon \text{ für alle } n \text{ und alle } \varepsilon > 0$$

$$\Rightarrow \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{\lambda \in \Lambda_j} a_{\lambda} \leq \sum_{\lambda \in \Lambda} a_{\lambda} + 2\varepsilon$$

$$\Rightarrow \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{\lambda \in \Lambda_j} a_{\lambda} \leq \sum_{\lambda \in \Lambda} a_{\lambda}$$

Umkehrung: $\geq$

$E \subseteq \Lambda$ endlich

$$E_j = E \cap \Lambda_j \quad (j = 0, 1, 2, \dots)$$

Nur endlich viele E_j sind $\neq \emptyset$

$$\begin{aligned} S(E) &= \sum_{\lambda \in E} a_\lambda = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{\lambda \in E_j} a_\lambda \leq \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{\lambda \in \Lambda_j} a_\lambda \\ \Rightarrow \sum_{\lambda \in \Lambda} a_\lambda &= \sup_E (S(E)) \leq \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{\lambda \in \Lambda_j} a_\lambda. \end{aligned}$$

2.6.6 Definition

Sei $c \in \mathbb{R}$: $c^+ = \max\{0, c\}$ positiver Anteil, bzw. $c^- = \max\{0, -c\}$ negativer Anteil

$$c \geq 0 : c^+ = c, c^- = 0$$

$$c < 0 : c^+ = 0, c^- = -c$$

$$c^+ - c^- = c$$

Sei $\Lambda \neq \emptyset$, $c_\lambda \in \mathbb{R}$ für jedes $\lambda \in \Lambda$

$$\sum_{\lambda \in \Lambda} c_\lambda^+ \text{ und } \sum_{\lambda \in \Lambda} c_\lambda^- \text{ seien erklärt}$$

$$\text{Man setzt } \sum_{\lambda \in \Lambda} c_\lambda = \sum_{\lambda \in \Lambda} c_\lambda^+ - \sum_{\lambda \in \Lambda} c_\lambda^-$$

2.6.7 Großer Umordnungssatz

Sei $\Lambda = \bigcup_j \Lambda_j$ (endlich oder unendlich) mit $\Lambda_j \cap \Lambda_k = \emptyset$ ($j \neq k$). Dann gilt

$$\sum_{\lambda \in \Lambda} c_\lambda = \sum_j \sum_{\lambda \in \Lambda_j} c_\lambda$$

sofern eine der beiden Seiten existiert.

Beweis:

$$\sum_{\lambda \in \Lambda} c_\lambda^\pm = \sum_j \sum_{\lambda \in \Lambda_j} c_\lambda^\pm \quad (\text{Hilfssatz})$$

$$\sum_{\lambda \in \Lambda} c_\lambda^+ - \sum_{\lambda \in \Lambda} c_\lambda^- = \sum_j \left(\sum_{\lambda \in \Lambda_j} c_\lambda^+ - \sum_{\lambda \in \Lambda_j} c_\lambda^- \right)$$

2.6.8 Spezialfall: Doppelreihensatz

($\Lambda = \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$)

$$\begin{aligned} \sum_{(j,k) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0} c_{j,k} &= \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} c_{j,k} \text{ Zeilensummen} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} c_{j,k} \text{ Spaltensummen} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{(j,k): j+k=n} c_{j,k} \text{ Diagonalsummen} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{(j,k): \max(j,k)=n} c_{j,k} \text{ Quadratsummen} \end{aligned}$$

falls eine der 5 Summen existiert, mit c_{j_k} durch $|c_{j_k}|$ ersetzt.

Beweis: $\Lambda = \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$

1. $\Lambda_j = \{(j, k) : k \in \mathbb{N}_0\}$
2. $\Lambda_k = \{(j, k) : j \in \mathbb{N}_0\}$
3. $\Lambda_n = \{(j, k) : j + k = n\} = \{(0, n), (1, n-1), \dots, (n, 0)\}$
4. $\Lambda_n = \{(j, k) : \max\{j, k\} = n\} = \{(0, n), (1, n), \dots, (n-1, n), (n, n), (n, 0), \dots, (n, n-1)\}$

2.6.9 Beispiele

(0) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konvergiert

(1) $\sum_{(j,k) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}} \frac{1}{j^2+k^2}$ existiert nicht

Beweis: Quadratsummen

$n \geq 1 : \sum_{\max(j,k)=n} \frac{1}{j^2+k^2} \leq \frac{1}{n^2} \cdot \text{Anzahl der Summanden}$

$\geq \frac{1}{2n^2} \cdot \text{Anzahl der Summanden}$

$(j^2 + k^2 \geq n^2, \quad j^2 + k^2 \leq 2n^2)$

$\sum_{\max(j,k)=n} \frac{1}{j^2+k^2} \geq \frac{1}{2n^2} (2n-1) \geq \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2}$

$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{\max(j,k)=n} \frac{1}{j^2+k^2} \right)$ divergiert,

weil $\sum \frac{1}{n}$ divergiert, $\sum \frac{1}{2n^2}$ konvergiert

(2) $\sum_{j,k \geq 1} \frac{1}{j^3+k^3}$ existiert

Beweis: Quadratsummen

$$\sum_{\max(j,k)=n} \frac{1}{j^3+k^3} \leq \frac{1}{n^3} \cdot (2n-1) < \frac{2}{n^2}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\max(j,k)=n} \frac{1}{j^3+k^3} < 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < 4$$

(3) $\sum_{j,k \geq 2} \frac{1}{j^k} = 2$

$$\begin{aligned} \sum_{j=2}^{\infty} \sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{1}{j}\right)^k &= \sum_{j=2}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{j}\right)^{k+2} \\ &= \sum_{j=2}^{\infty} \frac{1}{j(j-1)} = 1 \end{aligned}$$

(4)

$$\begin{aligned}
\sum_{(m,n) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0} \binom{n}{m} 2^{-n-m} &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{m=0}^n \binom{n}{m} 2^{-m} \right) 2^{-n} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{2} \right)^n \cdot 2^{-n} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3}{4} \right)^n = \frac{1}{1 - 3/4} = 4
\end{aligned}$$

2.6.10 Reihenmultiplikation/Cauchyprodukt

Sind $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ und $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ absolut konvergent, so gilt

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n \right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n$$

mit $c_n = \sum_{j=0}^n a_j b_{n-j} = \sum_{j=0}^n a_{n-j} b_j$

$\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ konvergiert absolut und heißt Cauchyprodukt

Beweis:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot \sum_{k=0}^{\infty} b_k &= \sum_{(n,k) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0} a_n b_k \\
&= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n+k=m} a_n b_k = \sum_{m=0}^{\infty} c_m.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{n+k=m} a_n b_k &= a_0 b_m + a_1 b_{m-1} + \cdots + a_{m-1} b_1 + a_m b_0 \\
&= \sum_{j=0}^m a_j b_{m-j} = c_m
\end{aligned}$$

Gerechtfertigt, weil $\sum_{n,k} |a_n| |b_k|$ existiert

$$\begin{aligned}
\sum_{\substack{0 \leq n \leq N \\ 0 \leq k \leq K}} |a_n| |b_k| &= \sum_{n=0}^N |a_n| \sum_{k=0}^K |b_k| \\
&\leq \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \sum_{k=0}^{\infty} |b_k| = M \\
\Rightarrow \sum_{(n,k) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0} |a_n b_k| &\leq M
\end{aligned}$$

2.6.11 Beispiel

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!} &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=0}^n \frac{a^j}{j!} \frac{a^{n-j}}{(n-j)!} \frac{n!}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} a^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2a)^n}{n!}\end{aligned}$$