4 Differentialrechnung[1]

4.1 Differenzierbare Funktionen

4.1.1 Definition

Es sei $f\colon I \to \mathbb{R}$ (I Intervall) un $x_0 \in I$.
f heißt *differenzierbar* in x_0, wenn der Grenzwert

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

existiert. $f'(x_0)$ ist die Ableitung (der Differentialquotient) in x_0, auch geschrieben als $\dfrac{df}{dx}(x_0)$.
$\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ ist der Differenzenquotient. Er stellt die Steigung der Geraden dar, die den Graphen von f an den Stellen x und x_0 schneidet.
f heißt differenzierbar, wenn $f'(x_0)$ in jedem $x_0 \in I$ existiert. Wenn f' sogar in I stetig ist, so heißt f *stetig differenzierbar*: $f \in C^1(I)$, d. h. f ist differenzierbar und $f' \in C^0(I)$.

4.1.2 Bemerkungen und Beispiele

(i) Wenn f in x_0 differenzierbar ist, so ist f auch stetig in x_0.

(ii) Sei $f(x) = c$ konstant. Dann ist $f'(x) = 0$.

(iii) Es ist $\dfrac{d}{dx} e^x = e^x$.

(iv) Es ist $\dfrac{d}{dx} \sin x = \cos x$, $\dfrac{d}{dx} \cos x = -\sin x$.

(v) Es ist $\dfrac{d}{dx} \log x = \dfrac{1}{x}$ für $x > 0$.

Beweis:

(i)

$$\begin{aligned}\lim_{x \to x_0} (f(x) - f(x_0)) &= \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}(x - x_0) \\ &= f'(x_0) \cdot 0 = 0\end{aligned}$$

(ii) klar.

(iii)

$$\frac{e^{x+h} - e^x}{h} = \frac{e^x(e^h - 1)}{h} = e^x \frac{e^h - 1}{h} \xrightarrow{h \to 0} e^h$$

[1]Version 195 vom 14. Februar 2006

(iv) Hier nur für den Sinus:

$$\begin{aligned}\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h} &= \frac{\sin x\cos h+\cos x\sin h-\sin x}{h}\\ &= \sin(x)\frac{\cos(h)-1}{h}+\cos(x)\frac{\sin h}{h}\\ &\to \sin(x)\cdot\frac{-1}{2}\cdot 0+\cos(x)\cdot 1\\ &= \cos x \text{ für } h\to 0.\end{aligned}$$

(v)

$$\begin{aligned}\frac{\log(x+h)-\log(x)}{h} &= \frac{\log(x(1+\frac{h}{x}))-\log(x)}{h}\\ &= \frac{\log(x)+\log(1+\frac{h}{x})-\log(x)}{h}\\ &= \frac{\log(1+\frac{h}{x})}{\frac{h}{x}}\cdot\frac{1}{x}\\ &\quad\left(\frac{\log(1+t)}{t}\to 1 \text{ für } t\to 0\right)\\ &\to \frac{1}{x} \text{ für } h\to 0\end{aligned}$$

4.1.3 Differentiationsregeln

Sind f und g differenzierbar in x_0 (oder in I) und ist $\lambda \in \mathbb{R}$, dann sind die folgenden Funktionen ebenfalls differenzierbar:

(1) $f+g$. Dabei ist $(f+g)'(x_0) = f'(x_0)+g'(x_0)$.

(2) λf. Dabei ist $(\lambda f)'(x_0) = \lambda f'(x_0)$.

(3) $f\cdot g$. Dabei ist $(f\cdot g)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0)+f(x_0)g'(x_0)$.

(4) $\frac{f}{g}$, falls $g(x_0)\neq 0$. Dabei ist $\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0)-f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}$.
Insbesondere ist $\left(\frac{1}{g}\right)' = \frac{-g'}{g^2}$.

Beweis:

(3)

$$\begin{aligned}\frac{f(x)g(x)-f(x_0)g(x_0)}{x-x_0} &= \frac{f(x)(g(x)-g(x_0))}{x-x_0}\\ &\quad+\frac{g(x_0)(f(x)-f(x_0))}{x-x_0}\\ &\to f(x_0)g'(x_0)+g(x_0)f'(x_0).\end{aligned}$$

(4) Beweise zuerst den Spezialfall $\frac{1}{g}$:
$g(x) \neq 0$, g stetig in x_0, also ist $g(x) \neq 0$ in einem Intervall $(x_o - \delta, x_0 + \delta)$.

$$\frac{\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{g(x_0)}}{x - x_0} = \underbrace{\frac{g(x_0) - g(x)}{x - x_0}}_{\to -g'(x_0)} \cdot \underbrace{\frac{1}{g(x)g(x_0)}}_{\to \frac{1}{g^2(x_0)}}$$

$$\to \frac{-g'(x_0)}{g^2(x_0)}$$

Nun $\frac{f}{g}$:

$$\left(\frac{f}{g}\right)' - \left(f \cdot \frac{1}{g}\right)' \overset{(3)}{=} f' \cdot \frac{1}{g} + f \cdot \left(\frac{1}{g}\right)'$$
$$= f' \cdot \frac{1}{g} - f \cdot \frac{g'}{g^2} = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$$

4.1.4 Umformung der Definition

Sei $f \colon I \to \mathbb{R}$ und $x_0 \in I$. Dann ist

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$
$$\iff \lim_{h \to 0} \underbrace{\frac{f(x_0 + h) - f(x_0) - h \cdot f'(x_0)}{h}}_{=: r(h)} = 0$$
$$\iff f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot h + h \cdot r(h) \text{ mit } r(h) \to 0 \text{ für } h \to 0$$

$f(x_0) + f'(x_0) \cdot h$ ist Approximation von $f(x_0 + h)$ in der Nähe von $h = 0$.

4.1.5 Kettenregel

Seien $g \colon I \to J$ und $f \colon J \to \mathbb{R}$ mit Intervallen I und J. Ist g differenzierbar in $x_0 \in I$ und ist f differenzierbar in $y_0 = g(x_0)$, dann ist $f \circ g$, $(f \circ g)(x) := f(g(x))$, differenzierbar in x_0 und es gilt

$$(f \circ g)'(x_0) = f'(y_0) \cdot g'(x_0).$$

Beweis: Es ist

$$\begin{aligned}
&(1) \quad g(x_0 + h) - g(x_0) = g'(x_0) \cdot h + h \cdot r(h) \text{ mit } r(h) \to 0 \text{ für } h \to 0 \\
&(2) \quad f(y_0 + k) - f(y_0) = f'(y_0) \cdot k + k \cdot \varrho(k) \text{ mit } \varrho \to 0 \text{ für } k \to 0
\end{aligned}$$

Damit ist

$$(f \circ g)(x_0 + h) - (f \circ g)(x_0) - h \cdot f'(y_0) \cdot g'(x_0)$$
$$= \underbrace{f(g(x_0 + h)) - f(y_0)}_{\otimes} - h \cdot f'(y_0) g'(x_0) = (*)$$

Dabei ist

$$\otimes = f(g(x_0 + h)) - f(y_0)$$

mit $k = g(x_0 + h) - g(x_0)$

$$\begin{aligned}
&= f(y_0 + k) - f(y_0) \\
&\overset{(2)}{=} f'(y_0) \cdot (g(x_0 + h) - g(x_0)) + (g(x_0 + h) - g(x_0)) \cdot \varrho(k) \\
&\overset{(1)}{=} f'(y_0) \cdot (g'(x_0) \cdot h + h \cdot r(h)) + g'(x_0) \cdot h\varrho(k) \\
&= f'(y_0)g'(x_0) \cdot h + h \cdot (f'(y_0) \cdot r(h) + g'(x_0) \cdot \varrho(k))
\end{aligned}$$

Für $h \to 0$ gilt dann: $k = g(x_0 + h) - g(x_0) \to 0$ und $\varrho(k) \to 0$. Daraus folgt dann für $(*)$:

$$(*) = f'(y_0)g'(x_0) \cdot h + h \cdot R(h),$$

wobei $R(h) = f'(y_0) \cdot r(h) + g'(x_0) \cdot \varrho(g(x_0 + h) - g(x_0)) \to 0$ für $h \to 0$.
Also: $(f \circ g)'(x_0) = f'(y_0)g'(x_0)$.

4.1.6 Beispiele

(1)

$$\frac{d}{dx} e^{\cos x} = e^{\cos x} \cdot \sin x$$

(2) Für $x > 0$ und $\alpha \in \mathbb{R}$ ist

$$\frac{d}{dx} x^\alpha = \frac{d}{dx} e^{\alpha \log x} = e^{\alpha \log x} \alpha \frac{1}{x} = \alpha \cdot x^{\alpha - 1}$$

4.1.7 Differenzierbarkeit der Umkehrfunktion

Sei $f\colon I \to \mathbb{R}$ stetig, injektiv und differenzierbar in $x_0 \in I$ mit $f'(x_0) \neq 0$. Dann ist $f^{-1}\colon J = f(I) \to I$ differenzierbar in $y_0 = f(x_0)$ und es ist

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}.$$

Falscher Beweis: Mit Kettenregel. Es gilt: $f(f^{-1}(y)) = y$. Differenzieren liefert

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dx} f(f^{-1}(y)) = f'(f^{-1}(y)) \cdot (f^{-1})'(y) \\
&\Rightarrow (f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x^{-1}(y_0))} = \frac{1}{f'(x_0)}.
\end{aligned}$$

Dieser „Beweis“ ist aber nur richtig, falls sicher ist, daß f^{-1} in y_0 differenzierbar ist.

Beweis: Es ist $y_0 = f(x_0)$ und $x_0 = f^{-1}(y_0)$. Setze $y_0 + h = f(x_0 + k)$, also ist k definiert durch

$$k := f^{-1}(y_0 + h) - x_0 \neq 0.$$

Damit gilt dann:

$$\frac{f^{-1}(y_0 + h) - f^{-1}(y_0)}{h} = \frac{1}{\frac{f(x_0+k) - f(x_0)}{k}}.$$

Für $h \to 0$ folgt $k \to 0$, da f^{-1} stetig ist, und damit ist

$$\frac{f^{-1}(y_0 + h) - f^{-1}(y_0)}{h} \longrightarrow \frac{1}{f'(x_0)}.$$

4.1.8 Beispiele

(1) Es ist

$$\frac{d}{dy}\log y = \frac{1}{\frac{d}{dx}e^x}\bigg|_{x=\log y} = \frac{1}{e^x}\bigg|_{x=\log y} = \frac{1}{y}$$

(2) Es ist

$$\frac{d}{dy}\sqrt[n]{y} = \frac{1}{\frac{d}{dx}x^n}\bigg|_{x=\sqrt[n]{y}} = \frac{1}{nx^{n-1}}\bigg|_{x=\sqrt[n]{y}} = \frac{1}{ny^{1-\frac{1}{n}}} = \frac{1}{n}y^{\frac{1}{n}-1}.$$

4.1.9 Höhere Ableitungen

Sei $f\colon I \to \mathbb{R}$ mit einem Intervall I. Wenn f differenzierbar ist, ist f' die Ableitung. Wenn f' differenzierbar ist, ist $(f')' = f''$ die 2. Ableitung von f und wenn f'' differenzierbar ist, dann ist $(f'')' = f'''$ die 3. Ableitung von f.
Allgemeiner: Es ist $f^{(0)} = f$, $f^{(1)} = f'$. Induktiv wird weiter definiert: $f^{(n+1)} = (f^{(n)})'$. Dabei ist $f^{(n)}$ die n-te Ableitung von f. Es werden dann folgende Mengen definiert:

$$\begin{aligned}
C^0(I) &= \{f\colon f \text{ ist stetig in } I\}\\
C^1(I) &= \{f\colon f' \text{ ist stetig in } I\}\\
C^n(I) &= \{f\colon f^{(n)} \text{ ist stetig in } I\}\\
C^\infty(I) &= \bigcap_{n\geq 0} C^n(I) = \{f\colon f^{(n)} \text{ existiert für alle } n \in \mathbb{N}_0\}
\end{aligned}$$

Dabei gilt:

$$C^0(I) \supseteq C^1(I) \supseteq C^2(I) \supseteq \cdots \supseteq C^\infty(I)$$

4.1.10 Leibnizregel

$$(f\cdot g)^{(n)} = \sum_{\nu=0}^{n}\binom{n}{\nu} f^{(\nu)} g^{(n-\nu)}$$

Beweis: mit Induktion: Für $n = 1$ ist dies die Produktregel. Für $n \mapsto n+1$: Aufgabe. Tip: Vergleiche mit dem Binomischen Lehrsatz, 1.5.6 auf Seite 12:

$$(a+b)^n = \sum_{\nu=0}^{n}\binom{n}{\nu} a^\nu b^{n-\nu}$$

4.2 Die Mittelwertsätze der Diff.-rechnung

4.2.1 Definition: Minimum, Maximum

Sei $f\colon I \to \mathbb{R}$ und $x_0 \in I$. f hat in x_0 ein Minimum bzw. Maximum, wenn $f(x) \geq f(x_0)$ bzw. $f(x) \leq f(x_0)$ für $x \in I$, $|x - x_0| < \delta$ für ein $\delta > 0$. Gilt $f(x) > f(x_0)$ bzw. $f(x) < f(x_0)$ für $x \in I$, $0 < |x - x_0| < \delta$, so heißt x_0 Stelle eines strikten Minimums bzw. Maximums.

4.2.2 Bemerkung

Ist x_0 kein Endpunkt von I und hat f in x_0 ein Extremum (Minimum oder Maximum) und existiert $f'(x_0)$, so ist $f'(x_0) = 0$.

Beweis: Für den Fall eines Maximums. Es gilt $f(x_0+h)-f(x_0)\leq 0$ für kleine $|h|$. Daraus folgt:

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\begin{array}{l}\leq 0,\text{ für } h>0\\ \geq 0,\text{ für } h<0\end{array}\xrightarrow{h\to 0} f'(x_0)\begin{array}{l}\leq 0,\text{ für } h>0\\ \geq 0,\text{ für } h<0\end{array}\Rightarrow f'(x_0)=0$$

4.2.3 Satz von Rolle

Ist $f\colon [a,b]\to \mathbb{R}$ stetig, $f(a)=f(b)$, und ist f differenzierbar in (a,b), so gibt es ein $\xi\in(a,b)$ mit $f'(\xi)=0$.

Beweis: Klar für konstantes f. Sonst hat f ein Extremum in $\xi\in(a,b)$. Dort ist $f'(\xi)=0$.

4.2.4 Mittelwertsatz der Differentialrechnung

Ist $f\in C^0([a,b])$ differenzierbar in (a,b), so gibt es ein $\xi\in(a,b)$ mit

$$f(b)-f(a)=(b-a)\cdot f'(\xi)\text{ bzw. }\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(\xi).$$

Beweis: Sei $g(x)=f(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$. Es ist $g(a)=g(b)=f(a)$. Außerden ist $g\in C^0([a,b])$ und diffbar in (a,b). Nach dem Satz von Rolle existiert ein $\xi\in(a,b)$ mit $g'(\xi)=0$ und damit

$$g'(\xi)=f'(\xi)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=0$$

4.2.5 Beispiele

(1) **Behauptung:** $\sin x\leq x$ für $x\geq 0$.
Beweis:

$$\sin x=\sin x-\sin 0\overset{\text{MWS}}{=}(x-0)\cdot\cos\xi\text{ mit }\xi\in(0,x)\leq x$$

(2) **Behauptung:** $\log(1+x)\geq\frac{x}{1+x}$ für $x>-1$.
Beweis: Es ist

$$\log(1+x)=\log(1+x)-\log(1+0)=(x-0)\frac{1}{1+\xi}=\frac{x}{1+\xi}.$$

Für $x>0$, $0<\xi<x$ gilt:

$$\frac{1}{1+\xi}>\frac{1}{1+x}\longrightarrow\frac{x}{1+\xi}>\frac{x}{1+x}$$

Für $-1<x<0$, $x<\xi<0$ gilt:

$$\frac{1}{1+\xi}<\frac{1}{1+x}\longrightarrow\frac{x}{1+\xi}>\frac{x}{1+x}$$

(3) Es ist $\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}$ der Tangens. Für die Ableitung gilt:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\tan x&=\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)'=\frac{\cos x\cdot\cos x-\sin x\cdot(-\sin x)}{(\cos x)^2}\\&=\frac{1}{(\cos x)^2}=1+(\tan x)^2>1\text{ für }0<x<\frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

Behauptung: $\tan x>x$ für $0<x<\frac{\pi}{2}$.
Beweis: $\tan x=\tan x-\tan 0=(x-0)\cdot(\tan)'(\xi)>x$ mit $\xi\in(0,x)$.

4.2.6 Satz

Sind f und g stetig in $[a,b]$ und differenzierbar in (a,b) mit $f' = g'$ in (a,b), dann gilt $f = g + c$ mit einer Konstanten c.

Beweis: $h = f - g$ ist stetig in $[a,b]$ und differenzierbar in (a,b). Es gilt $h' = f' - g' = 0$. Seien nun $x, y \in (a,b)$. Dann ist $h(y) - h(x) = (y-x)h'(\xi) = 0$, d. h. h ist konstant.

4.2.7 Satz

Sei f stetig in $[a,b]$ und differenzierbar in (a,b) mit $f'(x) \to \ell$ für $x \to a$. Dann ist f differenzierbar in $[a,b)$ mit $f'(a) = \ell = \lim\limits_{x\to a} f'(x)$.

Beweis: Sei $x \in (a,b)$. Dann gilt

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \overset{\text{MWS}}{=} f'(\xi) \text{ für ein } \xi \in (a,x).$$

Für $x \to a$ folgt $\xi \to a$, also $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} \to \ell$.

4.2.8 Aufgabe

Zeige: Sei f stetig in (a,b) und differenzierbar in (a,c) und (c,b) mit $c \in (a,b)$.
Existiert dann $\lim\limits_{x\to c} f'(x) = \ell$, so ist $f'(c) = \ell$.

4.2.9 Verallgemeinerter Mittelwertsatz

Sind f und g stetig in $[a,b]$, differenzierbar in (a,b), so gibt es ein $\xi \in (a,b)$ mit

$$(f(b) - f(a)) \cdot g'(\xi) = (g(b) - g(a)) \cdot f'(\xi)$$

beziehungsweise

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

Beweis: (Der Sonderfall $g(x) = x$ entspricht dem Mittelwertsatz)
Zuerst ein Falscher Beweis: Es gilt:

$$\begin{aligned} f(b) - f(a) &= f'(\xi_1)(b-a) \\ g(b) - g(a) &= g'(\xi_2)(b-a) \end{aligned}$$

Falls $g(b) - g(a) \neq 0$, dann kann dividiert werden:
$\Rightarrow$ verallgemeinerter Mittelwertsatz. Falsch! Denn i. A. ist $\xi_1 \neq \xi_2$!
Richtiger Beweis: Sei $h(x) = (f(b) - f(a))g(x) - (g(b) - g(a))f(x)$.
h ist stetig in $[a,b]$, differenzierbar in (a,b). Es ist

$$\begin{aligned} h(a) &= f(b)g(a) - f(a)g(b) \\ h(b) &= -f(a)g(b) + f(b)g(a)) \\ \Rightarrow h(a) &= h(b) \end{aligned}$$

Nach dem Satz von Rolle existiert nun ein $\xi \in (a,b)$ mit $h'(\xi) = 0$. Damit gilt:

$$0 = h'(\xi) = (f(b) - f(a))g'(\xi) - (g(b) - g(a))f'(\xi)$$

4.2.10 Regel von de l'Hôspital

1. Form: Seien f und g stetig in $[a, b)$ und differenzierbar in (a, b).
Außerdem sei $f(a) = g(a) = 0$, sowie

$$\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$$

existiere. Dann gilt:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = L$$

Sonderform: Seien f und g in (c, ∞) stetig und differenzierbar.
Außerdem sei $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \lim\limits_{x \to \infty} g(x) = 0$ und

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L.$$

Dann gilt

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = L$$

2. Form: Seien f und g differenzierbar in (a, b), $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a} g(x) = \infty$ und

$$\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L.$$

Dann gilt:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = L$$

Beweis:

1. Form:

$$\begin{aligned} \frac{f(x)}{g(x)} &= \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} \\ &\overset{\text{Va. MWS}}{=} \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \text{ für ein } \xi \in (a, x). \end{aligned}$$

Sonderform: Sei $F(x) = f(\frac{1}{x})$, $G(x) = g(\frac{1}{x})$ in $(0, \frac{1}{c})$. Es ist $F(x) \to 0$ und $G(x) \to 0$ für $x \to 0$.

$$\frac{F'(x)}{G'(x)} = \frac{f'(\frac{1}{x}) \cdot \frac{-1}{x^2}}{g'(\frac{1}{x}) \cdot \frac{-1}{x^2}} \to L$$

2. Form: Sei $0 < \varepsilon < \frac{1}{4}$:
Es existiert ein $c \in (a, b)$ mit $\left| \frac{f'(x)}{g'(x)} - L \right| < \varepsilon$ für $a < x < c$.
Es existert ein d, $a < d < c$ mit $\left| \frac{f(c)}{f(x)} \right| < \varepsilon$ und $\left| \frac{g(c)}{g(x)} \right| < \varepsilon$ für $a < x < d$.
Sei nun $a < x < d$. Dann ist

$$\begin{aligned} \frac{f(x)}{g(x)} - L &= \underbrace{\frac{f(x) - f(c)}{g(x) - g(c)}}_{\text{va. MWS}} \cdot \frac{1 - \frac{g(c)}{g(x)}}{1 - \frac{f(c)}{f(x)}} - L \\ &= \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} - L + \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}(H(x) - 1) \end{aligned}$$

$$H(x) = \frac{1 - \frac{g(c)}{g(x)}}{1 - \frac{f(c)}{f(x)}}, \text{ wobei } x < \xi < c$$

$$\begin{aligned}
\left|\frac{f(x)}{g(x)} - L\right| &< \varepsilon + \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \cdot \frac{\left|\frac{f(c)}{f(x)} - \frac{g(c)}{g(x)}\right|}{\left|1 - \frac{f(c)}{f(x)}\right|} \\
&< \varepsilon + (|L| + \varepsilon) \cdot \frac{2\varepsilon}{1-\varepsilon} \\
&< \varepsilon + \left(|L| + \frac{1}{4}\right) \cdot \frac{2\varepsilon}{\frac{3}{4}} \\
&= \text{const} \cdot \varepsilon \text{ für } a < x < d = a + \delta.
\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Behauptung.

4.2.11 Beispiele

(1)

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\log x}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 0.$$

(2)

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sinh x}{\cosh x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\cosh x}{\sinh x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\sinh x}{\cosh x}$$

direkt:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}} = 1$$

4.3 Anwendungen der Differentialrechnung

A Monotone Funktionen

$I = (a, b)$, $[a, b)$, $(a, b]$, $[a, b]$. $f\colon I \to \mathbb{R}$ stetig, differenzierbar in (a, b).

4.3.1 Satz

1. f monoton wachsend [fallend] $\iff$ $f'(x) \geq 0$ $[f'(x) \leq 0]$ in $a < x < b$.
2. Ist $f'(x) > 0$ $[f'(x) < 0]$ in (a, b), dann ist f streng wachsend [fallend].

Beweis:

(i) **„$\Rightarrow$“** Sei x, $x + h$, $h > 0$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0+} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \geq 0 \qquad (f \uparrow)$$

„$\Leftarrow$“ Sei $x < y$ und $f' \geq 0$:

$$f(y) - f(x) = (y - x) \cdot f'(\xi) \geq 0 \text{ mit } \xi \in (x, y).$$

Also ist f wachsend.

(ii) $\Rightarrow$ $f'(\xi) > 0$: $f(y) - f(x) > 0$, streng monoton.

4.3.2 Beispiel: $f(x) = x \cdot \log x$

Sei $f(x) = x \log x$ und $I = (0, \infty)$. Es ist

$$f'(x) = \log x + x\frac{1}{x} = \log x + 1 \begin{cases} > 0 & \text{für } x > \frac{1}{e} \\ < 0 & \text{für } 0 < x < \frac{1}{e} \end{cases}.$$

Es gilt außerdem: $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$.

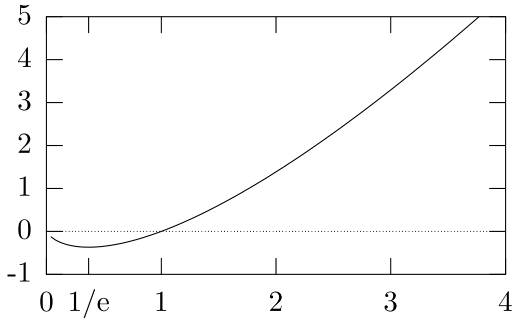

Abbildung 4.1: $f(x) = x \cdot \log x$

B Konvexe Funktionen

I und f wie vorher.

4.3.3 Definition: konvex

f heißt *konvex*, wenn für beliebige $x, y \in I$ und $0 < t < 1$ gilt:

$$f(ty + (1-t)x) \leq tf(y) + (1-t)f(x) \tag{4.1}$$

Interpretation: Sei $z = ty + (1-t)x$. Für $x < y$ gilt dann:

$$t(y-x) = z - x, \qquad t = \frac{z-x}{y-x}, \qquad 1 - t = \frac{y-z}{y-x}$$

Umgeformte Definition:

$$f(z) \leq \frac{z-x}{y-x} \cdot f(y) + \frac{y-z}{y-x} \cdot f(x) = l(z) \text{ linear} \tag{4.2}$$

Bedeutung der 2. Definition: f ist konvex im Intervall (a, b), wenn für beliebige x, y mit $a < x < y < b$ gilt, daß der Graph von f unterhalb der Geraden liegt, die die Funktion zwischen den Stellen a und b verbindet.

4.3.4 Satz

f ist genau dann konvex, wenn für $x < z < y$ beliebig gilt:

$$\frac{f(z) - f(x)}{z - x} \leq \frac{f(y) - f(z)}{y - z} \tag{4.3}$$

Beweis: (4.2) $\iff$ (4.3):

$$\begin{aligned}
&f(z) \leq \frac{z-x}{y-x}f(y) + \frac{y-z}{y-x}f(x)\\
\iff\ & f(z)(t+(1-t)) \leq \frac{z-x}{y-x}f(y) + \frac{y-z}{y-x}f(x)\\
\iff\ & f(z)\frac{z-x}{y-x} + f(z)\frac{y-z}{y-x} \leq \frac{z-x}{y-x}f(y) + \frac{y-z}{y-x}f(x)\\
\iff\ & f(z)(z-x) + f(z)(y-z) \leq f(y)(z-x) + f(x)(y-z)\\
\iff\ & f(z)(y-z) - f(x)(y-z) \leq f(y)(z-x) - f(z)(z-x)\\
\iff\ & \frac{f(z)-f(x)}{z-x} \leq \frac{f(y)-f(z)}{y-z}
\end{aligned}$$

4.3.5 Satz

(a) Ist f differenzierbar in (a,b), so ist f genau dann konvex, wenn f' monoton wachsend ist.

(b) Ist f zweimal differenzierbar in (a,b), so ist f genau dann konvex, wenn $f''(x) \geq 0$ in (a,b) ist.

Beweis: Zuerst für (b): Aus (a) folgt (b), denn: Wenn f'' existiert gilt

$$f \uparrow \iff f'' = (f')' \geq 0.$$

Jetzt der Beweis für (a):

„⇒“ f sei konvex und differenzierbar: Aus (4.3) folgt:

$$f'(x) \leq \frac{f(y)-f(x)}{y-x} \text{ für } z \to x$$

$$\frac{f(y)-f(x)}{y-x} \leq f'(y) \text{ für } z \to y$$

Daraus folgt:

$$f'(x) \leq f'(y)$$

„⇐“ f' sei monoton wachsend. Weise nun (4.3) nach:
Seien ξ und η beliebig mit $x < \xi < z < \eta < y$:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{f(z)-f(x)}{z-x} &\overset{\text{MWS}}{=} f'(\xi)\\
\frac{f(y)-f(z)}{y-z} &\overset{\text{MWS}}{=} f'(\eta) \geq f'(\xi)
\end{aligned}\right\} \Rightarrow (4.3)$$

C Die Arcusfunktionen

4.3.6 Arcustangens

Definition des Tangens: $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$. Es ist $\tan\colon (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}$ und für die Ableitung gilt: $\frac{d}{dx}\tan x = 1 + (\tan x)^2 \geq 1 > 0$. Also ist der Tangens streng wachsend. Zusätzlich gilt: $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \tan x = +\infty$ und

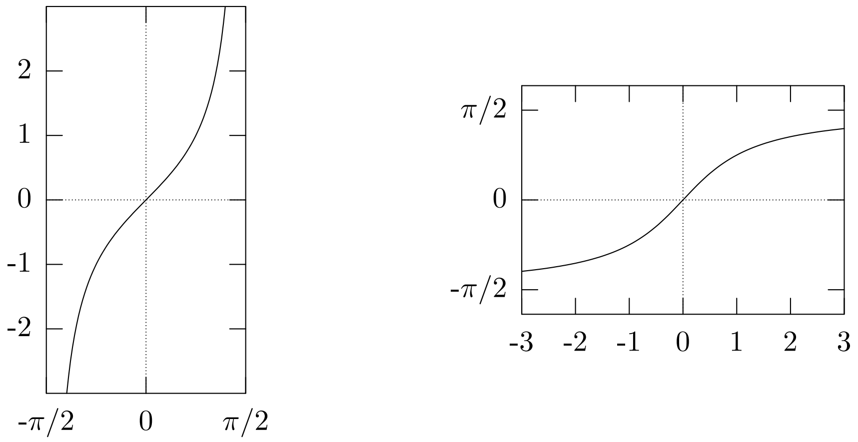

Abbildung 4.2: Tangens und Arcustangens

$\lim_{x\to-\frac{\pi}{2}} = -\infty.$
Für die zweite Ableitung gilt:

$$\frac{d^2}{dx^2}\tan x = 2\cdot\tan x\cdot(1+(\tan x)^2)\begin{cases} >0 & \text{in } (0,\frac{\pi}{2}) \\ <0 & \text{in } (-\frac{\pi}{2},0)\end{cases}$$

Der Tangens besitzt eine Umkehrfunktion, den *Arcustangens*: $\arctan\colon \mathbb{R}\to(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$. Es gilt:

$$\frac{d}{dy}\arctan y = \left.\frac{1}{1+(\tan x)^2}\right|_{x=\arctan y} = \frac{1}{1+y^2}$$

$$\frac{d^2}{dy^2}\arctan y = \frac{-2y}{(1+y^2)^2}$$

4.3.7 Arcuscotangens

Der Cotangens $\cot\colon (0,\pi)\to\mathbb{R}$ ist definiert durch $\cot x = \dfrac{\cos x}{\sin x}$. Es ist

$$\frac{d}{dx}\cot x = -1-(\cot x)^2$$

Die Umkehrfunktion ist der Arcuscotangens: $\operatorname{arccot}\colon \mathbb{R}\to(0,\pi)$

$$\frac{d}{dy}\operatorname{arccot} y = \frac{-1}{1+y^2}$$

4.3.8 Arcussinus

Für den Sinus gilt: $\sin\colon [-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]\to[-1,1]$ und

$$\frac{d}{dx}\sin x = \cos x > 0$$

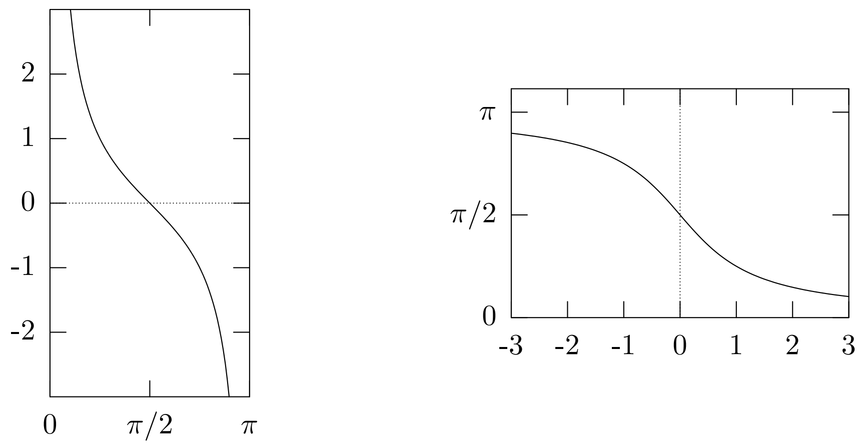

Abbildung 4.3: Cotangens und Arcuscotangens

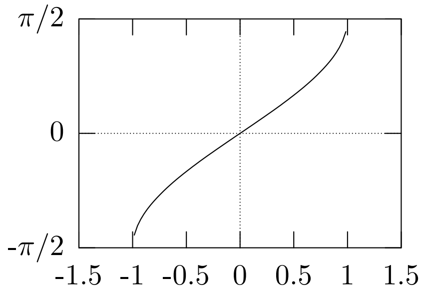

Abbildung 4.4: Arcussinus

in $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Der Sinus ist also streng wachsend in $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.
Die Umkehrfunktion des Sinus ist der Arcussinus $\arcsin\colon [-1,1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi 2}{2}]$. Es gilt:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dy} \arcsin y &= \left|\frac{1}{\cos x}\right|_{x=\arcsin y} \\
&= \frac{1}{\sqrt{1-(\sin x)}}\bigg|_{x=\arcsin y} = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} \text{ in } (-1,1). \\
\frac{d^2}{dy^2} \arcsin y &= -\frac{1}{2}(1-y^2)^{-3/2} \cdot (-2y) = y(1-y^2)^{-3/2}
\end{aligned}$$

4.3.9 Arcuscosinus

Für den Cosinus gilt $\cos\colon [0,\pi] \to [1,1]$ und

$$\frac{d}{dx} \cos x = -\sin x < 0$$

Die Umkehrfunktion ist der Arcuscosinus $\arccos\colon [-1,1] \to [0,\pi]$. Es gilt:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dy}\arccos y &= \left.\frac{1}{-\sin x}\right|_{x=\arccos y}\\ &= -\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\end{aligned}$$

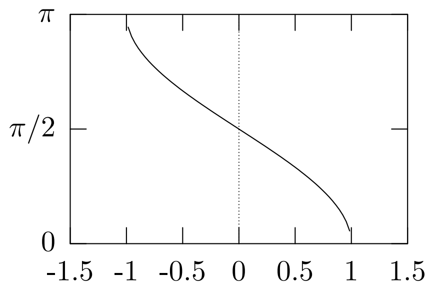

Abbildung 4.5: Arcuscosinus

D Differentiation und gleichmäßige Konvergenz

4.3.10 Beispiel

Sei $f_n(x) = |x|^{1+\frac{1}{n}}$ in $[-1,1]$, $n \in \mathbb{N}$. Es ist

$$\begin{aligned} x>0\colon f_n'(x) &= \left(1+\frac{1}{n}\right)x^{\frac{1}{n}}\\ x<0\colon f_n'(x) &= \left(1+\frac{1}{n}\right)(-x)^{\frac{1}{n}}(-1) = -\left(1+\frac{1}{n}\right)|x|^{\frac{1}{n}}\\ f_n'(0) &= 0\\ f_n'(x) &= \left(1+\frac{1}{n}\right)\cdot \operatorname{sign}(x)\cdot |x|^{\frac{1}{n}}\end{aligned}$$

Betrachte $f_n(x)$ und $f_n'(x)$ für $n \to \infty$:

$$f_n(x) \xrightarrow{\text{glm.}} |x| = f(x)$$

$f(x)$ ist nicht differenziervar in $x = 0$

$$f_n'(x) \xrightarrow{\text{pktw.}} 1\cdot 1\cdot \operatorname{sign}(x)$$

$f_n'(x)$ konvergiert nicht gleichmäßig gegen $f'(x)$.

4.3.11 Satz

Sei $f_n \in C^1(I)$ im Intervall I, $f_n(x)$ konvergiere punktweise in I gegen $f(x)$ und $f_n'(x)$ konvergiere gleichmäßig in I gegen $g(x)$. Dann ist $f \in C^1(I)$ und $f' = g$. Oder

$$\left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right)' = \lim_{n\to\infty} f_n'(x)$$

Beweis: g ist stetig, wegen der gleichmäßigen Konvergenz von $f_n'(x)$. Sei nun $x \in I$ und $\varepsilon > 0$:

1. Es existiert ein $\delta > 0$ mit $|g(x) - g(\xi)| < \varepsilon$ für alle $\xi \in I$ mit $|\xi - x| < \delta$ (Stetigkeit von g).
2. Es gibt ein n_0 mit $|f_n'(\xi) - g(\xi)| < \varepsilon$ für alle $\xi \in I$ und alle $n \geq n_0$ (glm. Konvergenz $f_n' \to g$).
3. Es gibt ein n_1 mit $|f(x) - f_n(x)| < \varepsilon$ für $n \geq n_1$. Gilt für h nun $0 < |h| < \delta$, so folgt:

$$|f(x) - f_n(x)| < |h| \cdot \varepsilon \text{ für } n \geq n_1$$

$$|f(x+h) - f_n(x+h) < |h| \cdot \varepsilon \text{ für } n \geq n_1$$

$$\begin{aligned}
\left| \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - g(x) \right| &= \left| \frac{f_n(x+h) - f_n(x)}{h} - f_n'(x) + (f_n'(x) - g(x)) \right. \\
&\quad \left. + \frac{f(x+h) - f_n(x+h)}{h} + \frac{f(x) - f_n(x)}{h} \right| \\
&\leq \left| \frac{f_n(x+h) - f_n(x)}{h} - f_n'(x) \right| \\
&\quad + \underbrace{\varepsilon}_{2.} + \underbrace{\varepsilon}_{3.} + \underbrace{\varepsilon}_{3.} \\
&\overset{\text{MWS}}{=} |f_n'(\xi_n) - f_n'(x)| + 3\varepsilon \\
&= |(f'(\xi_n) - g(\xi_n)) + (g(\xi_n) - g(x)) \\
&\quad + g(x) - f_n'(x)| + 3\varepsilon \\
&< \underbrace{\varepsilon}_{2.} + \underbrace{\varepsilon}_{1.} + \underbrace{\varepsilon}_{2.} + 3\varepsilon = 6\varepsilon
\end{aligned}$$

für $0 < |h| < \delta$, also ist $f'(x) = g(x)$.

4.3.12 Folgerungen

Folgerung 1: Seien $f_n \in C^1(I)$, $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ konvergiere punktweise in I und $\sum_{n=0}^{\infty} f_n'(x) = g(x)$ konvergiere gleichmäßig in I. Dann ist $f \in C^1(I)$ und $f' = g$:

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) \right)' = \sum_{n=0}^{\infty} f_n'(x)$$

Folgerung 2: $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ habe Konvergenzradius $r > 0$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x - x_0)^{n-1} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} (x - x_0)^n
\end{aligned}$$

Folgerung 3: Sei $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ in $I = (x_0 - r, x_0 + r)$. Dann ist $f \in C^{\infty}(I)$ und für $m = 1, 2, \ldots$ gilt:

$$f^{(m)}(x) = \sum_{n=m}^{\infty} n(n-1) \ldots (n-m+1) a_n (x - x_0)^{n-m}$$

Beweise:

Folgerung 1: Betrachte $x_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} f_k(x)$ und $s'_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} f'_k(x)$.

Folgerung 2: $f_n(x) = a_n(x-x_0)^n$, $f_n \in C^1(I)$, $I = (x_0 - r, x_0 + r)$.
Sei $0 < \varrho < r$, $J_\varrho = [x_0 - \varrho, x_0 + \varrho]$.
$\sum\limits_{n=0}^{\infty} (n+1)a_{n+1}(x-x_0)^n$ hat Konvergenzradius $r > 0$, denn:

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{(n+1)|a_{n+1}|} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_{n+1}} = \frac{1}{r}$$

$\Rightarrow$ Gleichmäßige Konvergenz von $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (n+1)a_{n+1}(x-x_0)^n$ in J_ϱ.
$\Rightarrow f \in C^1(J_\varrho)$ und $f' = g$ in J_ϱ.
Da $I = \bigcup\limits_{0<\varrho<r} J_\varrho \implies f \in C^1(I)$ und $f' = g$ in I.

Folgerung 3: Mit Induktion nach m. Selber machen.

4.3.13 Beispiele

(1)

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}e^x &= \frac{d}{dx}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n!}x^{n-1} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{(n-1)!} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!} = e^x \end{aligned}$$

(2) **Logarithmusreihe:** Für $-1 < x < 1$ gilt:

$$\log(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n$$

Beweis:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n$$

hat Konvergenzradius 1. Es ist $f(0) = 0$, $\log(1+0) = 0$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\cdot n\cdot x^{n-1} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k x^k \\ &= \frac{1}{1+x} = \frac{d}{dx}\log(1+x) \end{aligned}$$

$\Rightarrow \log(1+x) = f(x)$ in $(-1,1)$. Für $x \to 1-$ gilt:

$$\left.\begin{array}{l} \log 2 \\ \sum \frac{(-1)^{n-1}}{n} \text{ konvergiert} \end{array}\right\} \text{Abelscher Grenzwertsatz}$$

Also: $\log 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \pm \cdots$

(3) **Arcustangensreihe:** Für $-1 < x < 1$ gilt

$$\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}.$$

Beweis:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}$$

hat Konvergenzradius 1.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(-x^2\right)^n \\ &= \frac{1}{1+x^2} = \frac{d}{dx} \arctan x \end{aligned}$$

Also ist $\arctan x = f(x) + c$ mit einer Konstanten c.
Für $x = 0$ ist $\arctan(0) = 0$ und $f(0) = 0$. Also ist $c = 0$.

4.4 Der Satz von Taylor

4.4.1 Beispiele

1. Beispiel: $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ in $(-r, r)$.

$f \in C^\infty((-r,r))$, $f^{(m)}(x) = \sum\limits_{n=m}^{\infty} n(n-1)\dots(n-m+1) a_n x^{n-m}$

Für $x = 0$ gilt: $f^{(m)}(0) = m(m-1)\dots 1 \cdot a_m$. Also $a_m = \dfrac{f^{(m)}(0)}{m!}$.

Frage: Sei $f \in C^\infty(I)$ und $a_n = \dfrac{f^{(n)}(a)}{n!}$ für $n = 0, 1, 2, \dots$.

Gilt: $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n$?

NEIN!

2. Beispiel: Sei

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x = 0 \\ e^{-1/x^2} & \text{für } x \neq 0 \end{cases}$$

Behauptung: Es ist $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ und $f^{(n)}(0) = 0$ für $n = 0, 1, 2, \dots$

Damit ist $f(x) \neq \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$.

Beweis: Zeige

$$f^{(n)}(x) = \begin{cases} P_n(\frac{1}{x}) e^{-1/x^2} & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

mit P_n =Polynom vom Grad $3n$.
Beweis durch Induktion:

n = 0: $P_0(x) = 1$: $\lim\limits_{x\to 0} e^{-1/x^2} = 0 = f(0)$.
n ↦ n + 1: Für $x \neq 0$ ist nach I. V.:

$$f^{(n)}(x) = P_n\left(\frac{1}{x}\right) e^{-1/x^2}$$

$$\begin{aligned} f^{(n+1)}(x) &= P_n'\left(\frac{1}{x}\right) \cdot \frac{-1}{x^2} e^{-1/x^2} + P_n\left(\frac{1}{x}\right) e^{-1/x^2} \cdot \frac{2}{x^3} \\ &= e^{-1/x^2}\left[-\frac{1}{x^2} P_n'\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{2}{x^3} P_n\left(\frac{1}{x}\right)\right] \end{aligned}$$

Setze $\frac{1}{x} = y$:

$$P_{n+1}(y) = -y^2 \cdot \underbrace{P_n'(y)}_{\text{Grad}=3n-1} + 2 \cdot \underbrace{y^3 \cdot P_n(y)}_{\text{Grad}=3n+3}$$

$$\lim_{x\to 0} f^{(n)}(x) = \lim_{x\to 0} P_n\left(\frac{1}{x}\right) e^{-1/x^2} = \lim_{y\to\infty} P_n(y) e^{-y^2} \stackrel{?}{=} 0$$

Sei $|y| \geq 1$. Dann gilt

$$\begin{aligned} |P_n(y)| &= \left|c_0 + c_1 y + \cdots + c_{3n} y^{3n}\right| \\ &\leq (|c_0| + |c_1| + \cdots + |c_{3n}|) \cdot y^{3n} \\ &= C \cdot y^{3n} \end{aligned}$$

Gilt nun $y^{3n} \cdot e^{-y^2} \to 0$ für $y \to \infty$?

$$\frac{y^{3n}}{e^{y^2}} < \frac{y^{3n}}{\frac{y^{4n}}{(2n)!}} = \frac{(2n)!}{y^n} \xrightarrow{y\to\infty} 0$$

$$\left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{y^{2k}}{k!} > \frac{y^{2\cdot 2n}}{(2n)!}\right]$$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to 0} f^{(n)}(x) = 0$.
Nach einem früheren Satz existiert dann auch $f^{(n)}(0) = 0$.

4.4.2 Hilfssatz

Sei I ein Intervall und $a \in I$. Ist f nun $(n+1)$-mal differenzierbar in I mit $f(a) = f'(a) = \cdots = f^{(n)}(a) = 0$, dann gilt für $x \in I$ und $x \neq a$:

$$\frac{f(x)}{(x-a)^{n+1}} = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$$

ξ liegt dabei zwischen x und a.

Beweis: mit Induktion.

$n = 0$**:**

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \stackrel{\text{MWS}}{=} f'(\xi)$$

$n \mapsto n+1$**:** Sei $g = f'$.
g ist $(n+1)$-mal differenzierbar und $g(a) = \cdots = g^{(n)}(a) = 0$.
Induktionsvoraussetzung:

$$\frac{f'(x)}{(x-a)^{n+1}} = \frac{g(x)}{(x-a)^{n+1}} = \frac{g^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$$

Induktionsschluß:

$$\begin{aligned}\frac{f(x)}{(x-a)^{n+2}} \overset{\text{vMWS}}{=} \frac{f'(\xi_1)}{(n+2)(\xi_1-a)^{n+1}} &= \frac{g^{(n+1)}(\xi)}{(n+2)(n+1)!}\\ &= \frac{f^{(n+2)}(\xi)}{(n+2)!}\end{aligned}$$

Dabei liegt ξ_1 zwischen a und x und ξ liegt zwischen a und ξ_1.

4.4.3 Definition: Das Taylorpolynom

f sei n-mal differenzierbar im Intervall I und $a \in I$. Dann heißt

$$T_n(x;a) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

n-tes Taylorpolynom von f.

4.4.4 Bemerkung

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \iff T_n(x;a) \to f(x) \text{ für } n \to \infty \tag{4.4}$$

Es gilt $T_n^{(k)}(x;a)|_{x=a} = f^{(k)}(a)$ für $k = 0, 1, 2, \ldots, n$.

4.4.5 Satz von Taylor

Ist f $(n+1)$-mal differenzierbar in I und ist $a \in I$, dann gilt

$$f(x) = T_n(x;a) + R_n(x;a)$$

mit

$$R_n(x;a) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}.$$

Dabei liegt ξ zwischen a und x. $\mathbb{R}_n$ heißt *Lagrange-Restglied.* Ist $f \in C^\infty(I)$, so gilt (4.4) genau dann, wenn $R_n(x;a) \to 0$ für $n \to \infty$.

Beweis: Setze $g(x) = f(x) - T_n(x;a)$. $g(x)$ ist $(n+1)$-mal differenzierbar und $g(a) = g'(a) = \cdots = g^{(n)}(a) = 0$.
Hilfssatz $\Rightarrow$ Es ex. ein ξ zwischen a und x, so daß

$$R_n(x;a) = g(x) = \frac{g^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1},$$

da $f^{(n+1)} = g^{(n+1)} + \underbrace{T_n^{(n+1)}}_{=0}$.

4.4.6 Beispiele

1. Beispiel: Behauptung:

$$f(x) = (1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k \text{ für } \alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}_0$$

Sei $a = 0$:

$$\begin{aligned} f(0) &= 1 \\ f'(x) &= \alpha(1+x)^{\alpha-1} \\ f''(x) &= \alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2} \\ &\vdots \\ f^{(n)}(x) &= \alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n} \\ \frac{f^{(n)}(0)}{n!} &= \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} = \binom{\alpha}{n} \end{aligned}$$

Damit sind:

$$T_n(x;0) = \sum_{k=0}^{n} \binom{\alpha}{k} x^k$$

$$R_n(x;0) = \binom{\alpha}{n+1}(1+\xi)^{\alpha-n-1}x^{n+1}$$

Behauptung: Für $-1 < x < 1$ gilt

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k.$$

Beweis: für $-\frac{1}{2} < x < 1$: Zuerst für $0 < x < 1$: Sei $0 < \xi < x$ und wähle $n > \alpha$:

$$|R_n(x;0)| = \left|\binom{\alpha}{n+1}\right| x^{n+1} |\underbrace{(1+\xi)^{\alpha-n-1}}_{\leq (1+0)^{\alpha-n-1}=1}| \leq \left|\binom{\alpha}{n+1}\right| x^{n+1} \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

weil $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^{n+1}$ für $-1 < x < 1$ konvergiert.

Nun für $-1 < x < 0$: Sei $x < \xi < 0$ und wähle $n > \alpha$:

$$|R_n(x;0)| = \left|\binom{\alpha}{n+1}\right| \cdot |x|^{n+1} \cdot \left|\underbrace{(1+\xi)^{\alpha-n-1}}_{\leq (1+0)^{\alpha-n-1}=1}\right| \leq \left|\binom{\alpha}{n+1}\right| \cdot |1+\xi|^\alpha \cdot \left(\frac{|x|}{1-|x|}\right)^{n+1} \overset{?}{\to} 0$$

$R_n(x;0) \to 0$ für $n \to \infty$, falls $\frac{|x|}{1-|x|} < 1 \iff |x| < \frac{1}{2}$. Hier: $x > -\frac{1}{2}$.

2. Beispiel: Die Arcussinusreihe:
Behauptung:

$$\begin{aligned} \arcsin x &= x + \frac{1}{2\cdot 3}x^3 + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 5}x^5 + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 7}x^7 + \cdots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1\cdot 3\dots(2n-1)}{2\cdot 4\dots(2n)(2n+1)} x^{2n+1} \text{ für } -1 < x < 1. \end{aligned}$$

Beweis: Für $-\frac{1}{2} < x^2 < 1$, d. h. für $|x| < 1$ gilt:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\arcsin x &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\\ &= (1-x^2)^{-1/2}\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\binom{-\frac{1}{2}}{n}(-x^2)^n \quad \text{(vgl. 1. Beispiel)}\end{aligned}$$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{-\frac{1}{2}}{n}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1} \text{ hat Konvergenzradius 1}$$

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{-\frac{1}{2}}{n}(-1)^n x^{2n} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{d}{dx}\arcsin x$$

Aus $\arcsin(0) = 0$, $f(0) = 0$ und $f'(x) = \frac{d}{dx}\arcsin x$ folgt: $\arcsin x = f(x)$.
Betrachte nun die Stelle 1:

$$\begin{aligned}(-1)^n\binom{-\frac{1}{2}}{n} &= (-1)^n\frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{1}{2}-1)\dots(-\frac{1}{2}-n+1)}{1\cdot 2\dots n}\\ &= \frac{1\cdot 3\cdot 5\dots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\dots(2n)}\end{aligned}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1\cdot 3\cdot 5\dots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\dots(2n)}\cdot\frac{1}{2n+1} =?$$

Falls konvergent: Wert nach dem Abelschen Grenzwertsatz

$$= \lim_{x\to 1}\arcsin x = \frac{\pi}{2}.$$

Konvergiert diese Reihe?

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{N}\frac{1\dots(2n-1)}{2\dots(2n)}\cdot\frac{1}{2n+1} &= \lim_{x\to 1}\sum_{n=0}^{N}\frac{1\dots(2n-1)}{2\dots(2n)}\cdot\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\\ &\leq \frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Konvergenz.

4.5 Extremwertrechnung

4.5.1 Definition: relatives Minimum/Maximum

Sei $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$, $x_0 \in (a,b)$. f hat in x_0 ein *relatives Maximum* [*Minimum*], wenn es ein $\delta > 0$ gibt mit $f(x_0) \geq f(x)$ [$f(x_0) \leq f(x)$] für alle $x \in I$ mit $|x - x_0| < \delta$.

4.5.2 Satz

Ist $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ differenzierbar, so gilt:

(1) Hat f in $x_0 \in (a,b)$ ein relatives Extremum, so ist $f'(x_0) = 0$.

(2) Wechselt f' in x_0 das Vorzeichen, so hat f in x_0 ein relatives Extremum.

  (i) Ist $f'(x) < 0$ in $(x_0 - \delta, x_0)$ und $f'(x) > 0$ in $(x_0, x_0 + \delta)$ ist es ein Minimum.
  (ii) Ist $f'(x) > 0$ in $(x_0 - \delta, x_0)$ und $f'(x) < 0$ in $(x_0, x_0 + \delta)$ ist es ein Maximum.

Beweis:

(1) Siehe Satz von Rolle (4.2.3 auf Seite 74).

(2) hier für (i):
f ist fallend in $(x_0 - \delta, x_0)$ und f ist wachsend in $(x_0, x_0 + \delta)$. Das heißt, f hat ein Minimum in x_0.

4.5.3 Satz

1. Ist $f \in C^2(I)$, $I = (a, b)$, $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) > 0$ [$f''(x_0) < 0$], so hat f in x_0 ein relatives Minimum [Maximum].
2. Ist $f \in C^{2n}(I)$ mit $f'(x_0) = f''(x_0) = \cdots = f^{(2n-1)}(x_0) = 0$ und $f^{(2n)}(x_0) > 0$ [$f^{(2n)}(x_0) < 0$], so liegt in x_0 ein relatives Minimum [Maximum].

Beweis: Zu 2. mit dem Satz von Taylor:

$$\begin{aligned} f(x) &= T_{2n-1}(x; x_0) + R_{2n-1}(x; x_0) \\ &= f(x_0) + \frac{f^{(2n)}(\xi)}{(2n)!} \underbrace{(x - x_0)^{2n}}_{>0 \text{ für } x \neq x_0} \end{aligned}$$

mit ξ zwischen x und x_0.
z. B. $f^{(2n)}(x_0) > 0$:
Da $f^{(2n)}$ stetig ist, existiert ein $\delta > 0$ mit $f^{(2n)}(\xi) > 0$ in $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$

$$f(x) - f(x_0) = \underbrace{\frac{f^{(2n)}(\xi)}{(2n)!}}_{>0 \text{ für } |x - x_0| < \delta} \cdot \underbrace{(x - x_0)^{2n}}_{>0} > 0 \text{ für } 0 < |x - x_0| < \delta.$$

Also ist $f(x) > f(x_0) \Rightarrow$ relatives Minimum.
Für $f^{(2n)} < 0$ und relatives Minimum genauso.

4.5.4 Beispiele

Beispiel 1: $f(x) = x + \frac{1}{x}$ in $(0, \infty)$.

Es ist $f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} \begin{cases} < 0 & \text{für } 0 < x < 1 \\ = 0 & \text{für } x = 1 \\ > 0 & \text{für } x > 1 \end{cases}$.

Also hat f ein Minimum bei 1.

Beispiel 2: $f(x) = x^2 \cdot e^{-x}$ in $\mathbb{R}$.

Es ist $f'(x) = (2x - x^2)e^{-x}$, sowie $f''(x) = (2 - 4x + x^2)e^{-x}$ und $f(x) > 0$ für $x \neq 0$.
Es ist $f'(x) = 0$ genau für $x = 0$ und $x = 2$. Dabei ist $f''(0) = 2$ und $f''(2) = -2e^{-2} < 0$.
$f''(x) \stackrel{!}{=} 0$ für $x = 2 \pm \sqrt{2}$

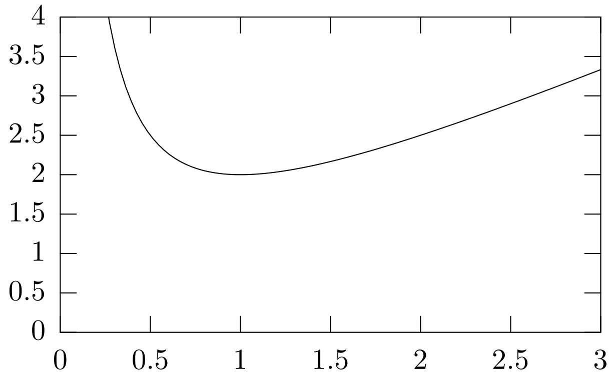

Abbildung 4.6: $f(x) = x + \frac{1}{x}$

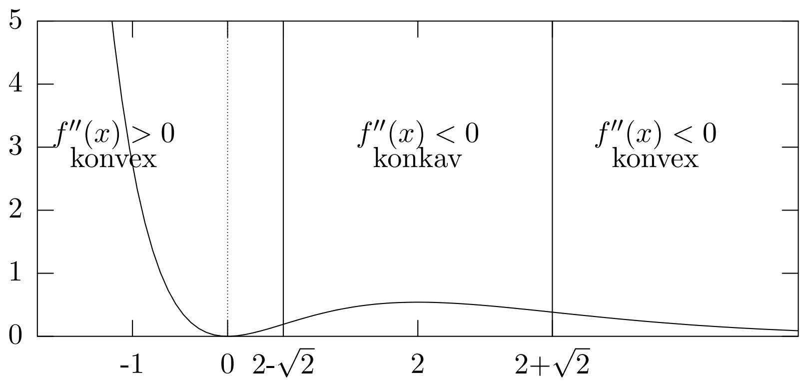

Abbildung 4.7: $f(x) = x^2 e^{-x}$