5 Das Riemannsche Integral[1]

5.1 Darbouxsche Summen

Sei $I = [a, b]$ mit $a < b$ und $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ sei beschränkt (d. h. $f(I)$ ist beschränkt).
$Z = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ mit $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$ heißt *Zerlegung* von $[a, b]$.
$I_k = [x_{k-1}, x_k]$ ist ein Teilintervall der Zerlegung und es werden definiert: $m_k = \inf f(I_k)$ und $M_k = \sup f(I_k)$.

5.1.1 Definition: Darbouxsche Ober- und Untersumme

$$s(Z) := \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1}) m_k$$

heißt (Darbouxsche) *Untersumme* und

$$S(Z) := \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1}) M_k$$

heißt (Darbouxsche) *Obersumme*. Es gilt:

$$s(Z) \leq S(Z)$$

5.1.2 Hilfssatz

(a) Ist $Z \subseteq Z'$ (d. h. Z' ist eine Verfeinerung von Z), dann gilt

$$s(Z) \leq s(Z') \text{ und } S(Z) \geq S(Z').$$

(b) Es gilt: $s(Z_1) \leq S(Z_2)$ für jedes Paar von Zerlegungen Z_1 und Z_2.

Beweis:

(a) Induktion nach der Zahl p der Punkte in $Z' \setminus Z$:
$\mathbf{p = 1}$: Sei $Z' = Z \cup \{\xi\}$. ξ teile das Intervall I_k. Es ist dann $m'_k := \inf f([x_{k-1}, \xi]) = \inf f(I'_k) \geq m_k$ und $m''_k := \inf f([\xi, x_k]) = \inf f(I'_k) \geq m_k$. Daraus folgt dann

$$\begin{aligned} s(Z) - s(Z') =& (x_k - x_{k-1}) m_k - ((\xi - x_{x-1}) m'_k + (x_k - \xi) m''_k) \\ =& \underbrace{(x_k - \xi)}_{>0} \cdot \underbrace{(m_k - m''_k)}_{\leq 0} + \underbrace{(\xi - x_{k-1})}_{>0} \cdot \underbrace{(m_k - m'_k)}_{\leq 0} \\ \leq& 0 \end{aligned}$$

Zeige genauso $S(Z) - S(Z') \geq 0$.
Induktionsschritt als Aufgabe.

(b) Sei $Z_1 \cup Z_2 = Z$ gemeinsame Verfeinerung von Z_1 und Z_2. Dann gilt:

$$s(Z_1) \overset{\text{(a)}}{\leq} s(Z) \leq S(Z) \overset{\text{(a)}}{\leq} S(Z_2)$$

[1] Version 184 vom 13. Februar 2006

5.1.3 Definition: Unteres und oberes Integral

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx := \sup\{s(Z)\colon Z \text{ Zerlegung von } [a,b]\}$$

heißt *unteres Integral* von f und

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,dx := \inf\{S(Z)\colon Z \text{ Zerlegung von } [a,b]\}$$

heißt *oberes Integral* von f. Es gilt

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx \leq \overline{\int_a^b} f(x)\,dx$$

5.1.4 Definition: Integrierbar, Riemannintegral

Gilt

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \overline{\int_a^b} f(x)\,dx,$$

so heißt f (Riemann-)integrierbar. Kurz $f \in R([a,b])$. Der gemeinsame Wert ist das Riemannintegral von f:

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

5.1.5 Riemannsches Integrabilitätskriterium

Sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ beschränkt. f ist genau dann integrierbar, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Zerlegung Z gibt mit $S(z) - s(Z) < \varepsilon$.

Beweis:

„⇒“ f sei integrierbar, d. h. das obere und das untere Integral sind gleich. Sei nun $\varepsilon > 0$. Zu diesem ε existiert eine Zerlegung Z_1 mit

$$s(Z_1) > \underline{\int_a^b} f(x)\,dx - \varepsilon.$$

Genauso existiert eine Zerlegung Z_2 mit

$$S(Z_2) < \overline{\int_a^b} f(x)\,dx + \varepsilon.$$

Sei nun $Z = Z_1 \cup Z_2$. Dann gilt:

$$S(z) - s(Z) \overset{\text{(a)}}{\leq} S(Z_2) - s(Z_1) = S(Z_2) - \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b f(x)\,dx - s(Z_1) \leq 2\varepsilon.$$

„⇐" Sei $\varepsilon > 0$. Dann gilt:

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,dx - \underline{\int_a^b} f(x)\,dx \overset{\forall Z}{\leq} S(Z) - s(Z) \overset{\exists Z}{<} \varepsilon$$

$$\Rightarrow \underbrace{\overline{\int_a^b} f(x)\,dx - \underline{\int_a^b} f(x)\,dx}_{\geq 0} \leq 0$$

$$\Rightarrow \overline{\int_a^b} f(x)\,dx = \underline{\int_a^b} f(x)\,dx \qquad \Rightarrow f \in R([a,b])$$

5.1.6 Satz: Monotone Funktionen sind integrierbar

Jede monotone Funktion $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ ist integrierbar.

Beweis: Sei $\varepsilon > 0$ und Z_n eine äquidistante Zerlegung mit $x_k = a + \frac{b-a}{n} \cdot k$ für $k = 0, 1, \ldots, n$. Sei z. B. $f \nearrow$:

$$\begin{aligned} S(Z_n) - s(Z_n) &= \sum_{k=1}^{n} \frac{b-a}{n} \cdot (f(x_k) - f(x_{x-1})) = \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} (f(x_k) - f(x_{k-1})) \\ &= (b-a)(f(b) - f(a))\frac{1}{n} < \varepsilon \text{ für große } n \end{aligned}$$

5.1.7 Beispiele

(1) Es ist $\int\limits_a^b e^x\,dx = e^b - e^a$. Wähle eine äquidistante Zerlegung mit $x_k = a + \frac{b-a}{n} \cdot k = a + hk$.

$$\begin{aligned} S(Z) &= h \sum_{k=1}^{n} e^{a+kh} = he^a \sum_{k=1}^{n} (e^h)^k \\ &= he^a e^h \sum_{k=0}^{n-1} (e^h)^k = he^a e^h \frac{e^{nh} - 1}{e^h - 1} \\ &= \frac{h}{e^h - 1} e^h e^a (e^{b-a} - 1) = \frac{h}{e^h - 1} e^h (e^b - e^a) \\ s(Z) &= \frac{h}{e^h - 1} (e^b - e^a) \end{aligned}$$

für $n \to \infty$, d. h. $h \to 0$ gilt:

$$\left.\begin{aligned} s(Z_n) &\to e^b - e^a \\ S(Z_n) &\to e^b - e^a \end{aligned}\right\} = \int_a^b e^x\,dx$$

$$e^b - e^a \leftarrow s(Z_n) \leq \underline{\int} \leq \overline{\int} \leq S(Z_n) \to e^b - e^a$$

(2) Für $p \in \mathbb{N}$ und $0 < a < b$ ist $\int\limits_a^b x^p = \dfrac{b^{p+1} - a^{p+1}}{p+1}$.
Äquidistante Zerlegung: $x_k = \frac{b-a}{n} \cdot k + a$

$$S(Z) = \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} \left(a + \frac{b-a}{n} \cdot k\right)^p = ?$$

Geometrische Zerlegung: $q = \sqrt[n]{b/a}$, $x_k = a \cdot q^k$ für $k = 0, 1, \ldots, n$:

$$\begin{aligned}
S(Z) &= \sum_{k=1}^{n} (a \cdot q^k - a \cdot q^{k-1}) \cdot a^p \cdot (q^k)^p = a^{p+1} \sum_{k=1}^{n} (q-1) \cdot q^{k-1} \cdot q^{kp} \\
&= (q-1) \cdot a^{p+1} \cdot \frac{1}{q} \sum_{k=1}^{n} (q^{p+1})^k \\
&= (q-1) \cdot a^{p+1} \cdot \frac{1}{q} \cdot q^{p+1} \sum_{k=0}^{n-1} (q^{p+1})^k \\
&= (q-1) \cdot a^{p+1} \cdot \frac{1}{q} \cdot q^{p+1} \cdot \frac{q^{(p+1)n} - 1}{q^{p+1} - 1} \\
&= a^{p+1} \cdot q^p \cdot \Big((b/a)^{p+1} - 1\Big) \cdot \frac{q-1}{q^{p+1} - 1} \\
&= q^p (b^{p+1} - a^{p+1}) \cdot \frac{q-1}{q^{p+1} - 1} \to 1 \cdot (b^{p+1} - a^{p+1}) \cdot \frac{1}{p+1} \text{ für } n \to \infty, \text{ d. h. } q \to 1 \\
s(Z) &= \cdots \to \frac{b^{p+1} - a^{p+1}}{p+1}
\end{aligned}$$

5.1.8 Hilfssatz

1. Für $a < c < b$ gilt:

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,dx = \overline{\int_a^c} f(x)\,dx + \overline{\int_c^b} f(x)\,dx$$

2. Ist $f(x) \le g(x)$ in $[a, b]$, dann ist

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,dx \le \overline{\int_a^b} g(x)\,dx.$$

3. Ist f in $x_0 \in [a, b]$ stetig, dann ist

$$F(x) := \overline{\int_a^x} f(t)\,dt, \qquad F(a) = 0$$

   in x_0 differenzierbar mit $F'(x_0) = f(x_0)$.

Entsprechendes gilt für das untere Integral.

Beweis:

(a) **„≤“** Sei Z Zerlegung von $[a, b]$,
$Z_1 = \{c\} \cup (Z \cap [a, c])$ und $Z_2 = \{c\} \cup (Z \cap [c, b])$:

$$\begin{aligned} \overline{\int_a^c} f(x)\,dx + \overline{\int_c^b} f(x)\,dx &\le S(Z_1) + S(Z_2) \\ &= S(Z \cup \{c\}) \le S(Z) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \overline{\int_a^c} f(x)\,dx + \overline{\int_c^b} f(x)\,dx \le \overline{\int_a^b} f(x)\,dx$$

„≥“ Sei Z_1 Zerlegung von $[a, c]$ und Z_2 Zerlegung von $[c, b]$.
Setze $Z = Z_1 \cup Z_2$. Dann gilt:

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,dx \le S(Z) = S(Z_1) + S(Z_2)$$

Für festes Z_2 gilt dann

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,dx - S(Z_2) \le \overline{\int_a^c} f(x)\,dx,$$

also

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,dx - \overline{\int_a^c} f(x)\,dx \le S(Z_2)$$

$$\Rightarrow \overline{\int_a^b} f(x)\,dx - \overline{\int_a^c} f(x)\,dx \le \overline{\int_c^b} f(x)\,dx$$

$$\Rightarrow \overline{\int_a^b} f(x)\,dx \le \overline{\int_a^c} f(x)\,dx + \overline{\int_c^b} f(x)\,dx \qquad \Rightarrow \text{Beh.}$$

(b) klar nach Definition.

(c) Sei $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ beschränkt und F definiert wie in der Behauptung.
Zu zeigen ist: f stetig in $x_0 \in [a, b] \Rightarrow F'(x_0) = f(x_0)$.
Bemerkung: Für $c \in \mathbb{R}$ ist $\int_a^b c\,dx = (b - a) \cdot c$.
Beweis: für den Fall $x_0 < b$. Sei $h > 0$. Dann ist

$$\begin{aligned} \frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h} - f(x_0) &\overset{(a)}{=} \frac{1}{h} \overline{\int_{x_0}^{x_0+h}} f(t)\,dt - f(x_0) \\ &= \frac{1}{h} \overline{\int_{x_0}^{x_0+h}} (f(t) - f(x_0))\,dt \end{aligned}$$

Sei nun $\varepsilon > 0$. Dann existiert in $\delta > 0$ mit $|f(t) - f(x_0)| < \varepsilon$ für $t \in [a, b]$ mit $|t - x_0| < \delta$. Also gilt: $-\varepsilon < f(t) - f(x_0) < \varepsilon$. Daraus folgt:

$$-\varepsilon = \frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h} -\varepsilon\, dt < \frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h} - f(x_0) < \frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h} \varepsilon\, dt = \varepsilon$$

das heißt:

$$\left|\frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h} - f(x_0)\right| < \varepsilon \text{ für } 0 < h < \delta.$$

Genauso für $-\delta < h < 0$, d. h. $F'(x_0) = f(x_0)$.

5.1.9 Satz: Stetige Funktionen sind integrierbar

Jede stetige Funktion $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ ist integrierbar, d. h. $C([a, b]) \subseteq R([a, b])$.

1. Beweis: Sei für $a < x \le b$

$$H(x) := \overline{\int_a^x} f(t)\, dt - \underline{\int_a^x} f(t)\, dt \text{ mit } H(a) = 0$$

Nach (c) ist dann in $[a, b]$

$$H'(x) = f(x) - f(x) = 0,$$

d. h. $H(x) = H(a) = 0$ für $x \in [a, b]$, insbesondere ist $H(b) = 0$, also gilt:

$$\overline{\int_a^b} f(t)\, dt = \underline{\int_a^b} f(t)\, dt.$$

2. Beweis: Sei f gleichmäßig stetig. Dann existiert zu $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ mit $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ für alle $x, y \in [a, b]$ mit $|x - y| < \delta$. Wähle eine Zerlegung $Z = \{x_0, \dots, x_n\}$ mit $x_k - x_{k-1} < \delta$ für $k = 1, 2, \dots, n$. Dann gilt:

$$S(Z) - s(Z) = \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1})(f(\xi_k) - f(\eta_k))$$

mit $\max\limits_{I_k} f(x) = f(\xi_k)$ mit $\xi_k \in I_k$ und $\min\limits_{I_k} f(x) = f(\eta_k)$ mit $\eta_k \in I_k$. Daraus folgt:

$$S(Z) - s(Z) < \varepsilon \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1}) = (b - a)\varepsilon.$$

Nach dem Riemannkriterium ist dann $f \in R([a, b])$.

5.1.10 Satz

Ist $F \in C^1([a, b])$ und $F' = f$, so gilt:

$$\int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a)$$

Beweis: Sei $H(x) = \int\limits_a^x f(t)\,dt$ mit $H(a) = 0$. Es ist dann $H \in C^1([a,b])$ mit $H'(x) = f(x)$. $\Rightarrow$ $F(x) = H(x) + \text{const}$. Für $x = a$ gilt dann $F(a) = 0 + \text{const}$.

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = H(b) = F(b) - F(a)$$

5.2 Riemannsche Summen

5.2.1 Definition: Riemannsche Zwischensumme

Ist Z eine Zerlegung, so setzt man

$$\sigma(Z,\xi) = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}).$$

σ heißt *Riemannsche Zwischensumme* zum Zwischenpunktsystem (ZWPS) $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$, wobei $\xi_k \in I_k$ ist.

5.2.2 Hilfssatz

Es gilt

$$s(Z) \leq \sigma(Z,\xi) \leq S(Z)$$

und

$$\begin{aligned} s(Z) &= \inf\{\sigma(Z,\xi) \colon \xi \text{ ZWPS}\} \\ S(Z) &= \sup\{\sigma(Z,\xi) \colon \xi \text{ ZWPS}\} \end{aligned}$$

Beweis: Die Ungleichung $s(Z) \leq \sigma(Z,\xi) \leq S(Z)$ ist klar.
Sei nun $\varepsilon > 0$. Dazu gibt es ein $\xi_k \in I_k$ $(k = 1, \ldots, n)$ mit $f(\xi_k) < m_k + \varepsilon$.

$$\begin{aligned} \sigma(Z,\xi) &= \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) \\ &< \sum_{k=1}^{n} (m_k + \varepsilon)(x_k - x_{k-1}) \\ &= s(Z) - \varepsilon(b-a) \end{aligned}$$

Die Rechnung ist für $S(Z)$ analog.
Aufgabe: Falls f stetig ist, ist $s(Z) = \min\{\sigma(Z,\xi) \colon \xi \text{ ZWPS}\}$.

5.2.3 Satz

f ist genau dann Riemann-integrierbar und $\int\limits_a^b f(x)\,dx = J$, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Zerlegung Z gibt mit $|\sigma(Z,\xi) - J| < \varepsilon$ für alle ZWPSe ξ.

Beweis:

„⇒“ Sei $f \in R([a,b])$ und $J = \int\limits_a^b f(x)\,dx$. Zu $\varepsilon > 0$ existiert eine Zerlegung Z mit $S(Z) - s(Z) < \varepsilon$. Sei nun ξ ein beliebiges ZWPS. Dann gilt:

$$\begin{aligned} \sigma(Z,\varepsilon) - J \le S(Z) - J \le S(Z) - s(Z) < \varepsilon \\ J - \sigma(Z,\varepsilon) \le J - s(Z) \le S(Z) - s(Z) < \varepsilon \end{aligned}$$

Daraus folgt: $|\sigma(Z,\xi) - J| < \varepsilon$.

„⇐“ Zu $\varepsilon > 0$ existiere nach Voraussetzung ein Z mit $-\varepsilon < \sigma(Z,\xi) - J < \varepsilon$ für alle ZWPSe ξ. Mit dem Hilfssatz 5.2.2 folgt dann:

$$\begin{aligned} S(Z) - J &\le \varepsilon \\ -\varepsilon &\le s(Z) - J \\ \Rightarrow S(Z) - s(Z) &\le \varepsilon + J - (J - \varepsilon) = 2\varepsilon \\ \Rightarrow f &\in R([a,b]). \end{aligned}$$

Mit dem 1. Teil folgt dann $\int\limits_a^b f(x)\,dx = J$.

5.2.4 Satz

Seien (Z_m) Zerlegungen von $[a,b]$ mit $|Z_m| \to 0$ für $m \to \infty$ (Dabei ist $|Z| := \max |I_k|$ das Feinheitsmaß—die Länge des längsten Teilintervalls—von Z). Dann gilt:

(a)

$$\lim_{m\to\infty} s(Z_m) = \underline{\int_a^b} f(x)\,dx$$

(b)

$$\lim_{m\to\infty} S(Z_m) = \overline{\int_a^b} f(x)\,dx$$

(c)

$$\lim_{m\to\infty} \sigma(Z_m, \xi^{(m)}) = \int_a^b f(x)\,dx$$

für beliebige ZWPSe $\xi^{(m)}$ für Z_m, falls $f \in R([a,b])$.

Beweis: In 5.2.6.

5.2.5 Hilfssatz

Sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ beschränkt mit $|f(x)| \le M$ für $a \le x \le b$. Z und Z_0 seien Zerlegungen von $[a,b]$, Z_0 habe $p+2$ Teilpunkte. Dann gilt:

$$\begin{aligned} s(Z \cup Z_0) \le s(Z) + 2pM|Z \cup Z_0| \\ S(Z \cup Z_0) \le s(Z) - 2pM|Z \cup Z_0|. \end{aligned}$$

Beweis: Für die Untersumme. Per Induktion nach p:

$p=1$: Sei $Z_0 = \{x, \overline{x}, b\}$ mit $\overline{x} \in [x_{k-1}, x_k] = I_k$. Teile I_k auf in $I'_k = [x_{k-1}, \overline{x}]$ und $I''_k = [\overline{x}, x_k]$.
Setze $m'_k = \inf f(I'_k)$ und $m''_k = \inf f(I''_k)$.
Es gilt $m_k = m'_k$ oder $m_k = m''_k$, und es gilt $-M \leq m_k, m'_k, m''_k \leq M$. Damit ist

$$\begin{aligned} s(Z \cup Z_0) - s(Z) &= (\overline{x} - x_{k-1})m'_k + (x_k - \overline{x})m''_k - (x_k - x_{k-1})m_k \\ &\leq \max\{\overline{x} - x_{k-1}, x_k - \overline{x}\} \cdot 2M \\ &\leq |Z \cup Z_0| \cdot 2M \end{aligned}$$

$p \mapsto p+1$: Selber machen.

5.2.6 Beweis für 5.2.4

(a) Sei $\varepsilon > 0$. Dazu existiert ein Z_0 mit

$$\underline{J} = \underline{\int_a^b} f(x)\,dx,$$

so daß $\underline{J} - s(Z_0) < \varepsilon$ ist. Z_0 habe $p+2$ Teilpunkte. Dann gilt:

$$s(Z_n \cup Z_0) \leq s(Z_n) + 2pM|Z_n \cup Z_0|.$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned} \underline{J} &\geq s(Z_n) \\ &\geq s(Z_n \cup Z_0) - 2pM|Z_n \cup Z_0| \\ &\geq s(Z_0) - 2pM|Z_n| \\ &> \underline{J} - \varepsilon - 2pM|Z_n| \end{aligned}$$

damit ist $0 \leq \underline{J} - s(Z_n) < \varepsilon + 2pM|Z_n| < 2\varepsilon$ für $n \geq n_0$, d. h. $|\underline{J} - s(Z_n)| < 2\varepsilon$ für $n \geq n_0$.

(b) $S(Z_n)$ genauso.

(c) Sei $J = \int_a^b f(x)\,dx$. Dann ist:

$$\begin{gathered} s(Z_m) \leq \sigma(Z_m, \xi^{(m)}) \leq S(Z_m) \\ \underbrace{s(Z_m) - J}_{\to 0\ (m \to \infty)} \leq \sigma(Z_m, \xi^{(m)}) - J \leq \underbrace{S(Z_m) - J}_{\to 0\ (m \to \infty)} \\ \Rightarrow (\sigma(Z_m, \xi^{(m)}) - J) \to 0 \text{ für } m \to \infty \end{gathered}$$

5.2.7 Regeln für Riemann-integrierbare Funktionen

(a) $f, g \in R(I) \Rightarrow (f+g) \in R(I)$ mit $\int_a^b (f+g)(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$.

(b) $f \in R(I)$, $c \in \mathbb{R} \Rightarrow (cf) \in R(I)$ mit $\int_a^b (cf)(x)\,dx = c \int_a^b f(x)\,dx$.

(c) $f, g \in R(I) \Rightarrow (fg) \in R(I)$.

(d) $g \in R(I)$, $|g(x)| \geq c > 0$ für $a \leq x \leq b \Rightarrow 1/g \in R(I)$.

(e) $f, g \in R(I)$, $f(x) \leq g(x)$ für $a \leq x \leq b \Rightarrow \int\limits_a^b f(x)\,dx \leq \int\limits_a^b g(x)\,dx$.

(f) $f \in R(I) \Rightarrow |f| \in R(I)$ und $\left|\int\limits_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int\limits_a^b |f(x)|\,dx$.

(g) $f \in R([a,c])$ und $f \in R([c,b]) \Rightarrow f \in R([a,b])$
mit $\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_a^c f(x)\,dx + \int\limits_c^b f(x)\,dx$.

Beweis:

(a),(b),(e): Sei (Z_n) eine Zerlegungsfolge mit $|Z_n| \to 0$ und ZWPSen $\xi^{(n)}$. Definiere nun $\sigma_n := \sigma(Z_n, \xi^{(n)})$. Aus den Regeln für konvergente Folgen folgen dann die Behauptungen (a), (b) und (e).

(c),(d),(f): Vorbemerkung: Gilt

$$|f(x) - f(y)| \leq C \sum_{j=1}^{m} |\varphi_j(x) - \varphi_j(x)|$$

und $\varphi_j \in R(I)$, dann ist $f \in R(I)$.
Beweis: Sei Z Zerlegung mit den Intervallen I_k. Es ist

$$\begin{aligned}
M_k - m_k &= \sup f(I_k) - \inf f(I_k) \\
&= \sup\{(f(x) - f(y))\colon x, y \in I_k\} \\
&\leq C \cdot \sup \left\{ \sum_{k=1}^{m} \varphi_j(x) - \varphi_j(y)\colon x, y \in I_k \right\} \\
&\leq C \cdot \sum_{j=1}^{m} \sup \varphi_j(I_k) - \inf \varphi_j(I_k)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow S(Z; f) - s(Z; f) &\leq C \sum_{j=1}^{m} S(Z; \varphi_j) - s(Z; \varphi_j) \\
&\leq \varepsilon \text{ für geeignetes } Z
\end{aligned}$$

$\Rightarrow f \in R(I)$.

(c) Es ist

$$\begin{aligned}
|f(x) \cdot g(x) - f(y) \cdot g(y)| &= |(f(x) - f(y)) \cdot g(x) + (f(x) - g(y)) \cdot f(y)| \\
&\leq |f(x) - f(y)| \cdot M + |g(x) - g(y)| \cdot M
\end{aligned}$$

Setze nun $\varphi_1 = f$ und $\varphi_2 = g$. M ist Schranke für g und f. Aus der Vorbemerkung folgt dann: $fg \in R(I)$.

(d)

$$\left|\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{g(y)}\right| = \left|\frac{g(y) - g(x)}{g(y)g(x)}\right| \leq \frac{1}{c^2} \cdot |g(x) - g(y)|$$

$\Rightarrow 1/g \in R(I)$.

(f) Es ist $||f(x)| - |f(y)|| \leq |f(x) - f(x)| \Rightarrow |f| \in R(I)$. Dabei ist

$$\begin{aligned} |\sigma(Z, \xi, f)| &= \left|\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})\right| \\ &\leq \sum_{k=1}^{n} |f(\xi_k)| \cdot (x_k - x_{k-1}) \\ &= \sigma(Z, \xi, |f|) \end{aligned}$$

oder mit (e): $-|f| \leq f \leq |f|$.

(g): schon bewiesen in 5.1.8 auf Seite 96.

5.2.8 Satz

Ist $f_n \in R(I)$ für $n = 1, 2, 3, \ldots$ mit $f_n \to f$ gleichmäßig auf $[a, b]$, dann ist $f \in R(I)$ und

$$\int_a^b \left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right) dx = \int_a^b f(x)\, dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\, dx$$

Beweis: Sei $\varepsilon > 0$. Dazu existiert ein n_0 mit $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ für $n \geq n_0$ und $x \in I$. Für eine Zerlegung Z mit ZWPS ξ gilt:

$$|\sigma(Z, \xi, f) - \sigma(Z, \xi, f_n)| < \varepsilon(b - a)$$

Für die Zerlegungsfolge (Z_m) mit $|Z_m| \to 0$ und ZWPSen $\xi^{(m)}$ gilt:

$$\lim_{n\to\infty} \sigma(Z_m, \xi^{(m)}, f) = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\, dx$$

$\Rightarrow f \in R(I)$ und $\int f = \lim\limits_{n\to\infty} \int f_n$.

5.3 Hauptsatz der Diff.- und Integralrechnung

5.3.1 Mittelwertsatz der Integralrechnung

Ist $f\colon [a, b] \to [m, M]$ Riemann-integrierbar, dann gilt:

$$m \leq \frac{1}{b - a} \int_a^b f(x)\, dx \leq M.$$

Ist f stetig, so gibt es ein $\xi \in (a, b)$ mit

$$\frac{1}{b - a} \int_a^b f(x)\, dx = f(\xi).$$

Beweis: Aus $m \leq f(x) \leq M$ folgt $m \cdot (b-a) \leq \int\limits_a^b f(x)\,dx \leq M \cdot (b-a)$.
Ist f stetig, so ist

$$\min_{x\in[a,b]} f(x) \leq \frac{1}{b-a}\int\limits_a^b f(x)\,dx \leq \max_{x\in[a,b]} f(x),$$

d. h. es existiert ein $\xi \in (a,b)$ mit

$$f(\xi) = \frac{1}{b-a}\int\limits_a^b f(x)\,dx.$$

5.3.2 Definition: Stammfunktion, unbestimmtes Integral

$F\colon I \to \mathbb{R}$ heißt *Stammfunktion* von $f\colon I \to \mathbb{R}$, wenn $F' = f$ in I ist. Statt Stammfunktion nennt man F *unbestimmtes Integral* von f, kurz $\int f$.

5.3.3 Hauptsatz der Diff.- und Integralrechnung

(a) Hat $f \in R(I)$ $(I = [a,b])$ eine Stammfunktion F, so gilt:

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) =: F(x)\Big|_a^b.$$

(b) $f \in C([a,b])$ hat eine Stammfunktion:

$$F(x) = \int\limits_a^x f(t)\,dt \text{ für } a \leq x \leq b.$$

Beweis:

(a) Sei Z_n mit $x_k^{(n)} = a + \frac{b-a}{n} \cdot k$, $k = 0,1,\dots,n$, eine Folge von äquidistanten Zerlegungen. Dann ist

$$\begin{aligned} F(b) - F(a) &= \sum_{k=1}^{n}\Big(F(x_k^{(n)}) - F(x_{k-1}^{(n)})\Big) \\ &\overset{\substack{\text{MWS}\\\text{Diff.}}}{=} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k^{(n)})(x_k^{(n)} - x_{k-1}^{(n)}) \end{aligned}$$

mit $x_{k-1}^{(n)} < \xi_k^{(n)} < x_k^{(n)}$:

$$\begin{aligned} &= \sigma(Z_n, \xi^{(n)}) \\ &\to \int\limits_a^b f(x)\,dx. \end{aligned}$$

Eigentlich ist es „=“ statt „→“, da $F(b) - F(a)$ konstant ist.

(b) schon bewiesen in Abschnitt 5.1.9 auf Seite 98.

5.3.4 Beispiel

$\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ ist divergent. Wie geht $s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ gegen ∞?

$$s_n < 1 + \int\limits_1^n \frac{1}{x}\, dx = 1 + \log n$$

$$s_n > \int\limits_1^n \frac{1}{x}\, dx = \log n$$

$$\Rightarrow\; 0 < \underbrace{s_n - \log n}_{=:c_n} < 1$$

Dabei ist $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = \gamma$ die *Euler-Mascheronische Konstante*. c_n ist streng fallend, da

$$\begin{aligned} c_{n+1} - c_n &= \frac{1}{n+1} - \log(n+1) + \log n \\ &= \frac{1}{n+1} - [\log(n+1) - \log n] \\ &= \frac{1}{n+1} - \int\limits_n^{n+1} \frac{dx}{x} \\ &< \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+1} = 0, \end{aligned}$$

also ist c_n konvergent, da c_n auch beschränkt ist.

5.3.5 Partielle Integration

(a) Sind $f, g\colon I \to \mathbb{R}$ differenzierbar und hat $f'g$ eine Stammfunktion, so hat auch fg' eine Stammfunktion und es gilt

$$\int fg' = fg - \int f'g.$$

(b) Sind $f, g \in C^1([a,b])$, so gilt

$$\int\limits_a^b f(x)g'(x)\, dx = f(x)g(x)\Big|_a^b - \int\limits_a^b f'(x)g(x)\, dx.$$

Beweis: (für (a), denn aus (a) folgt (b)):

$$\begin{aligned} (fg)' &= f'g + fg' \\ \Rightarrow fg' &= (fg)' - f'g \\ \Rightarrow \int fg' &= fg - \int f'g \end{aligned}$$

5.3.6 Substitutionsregel

Sei $f\colon I \to \mathbb{R}$, und $\varphi\colon J \to I$ sei differenzierbar.

(a) Hat f eine Stammfunktion F, so hat $(f \circ \varphi)\varphi'$ eine Stammfunktion: $F \circ \varphi$

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt = \int f(x)\,dx \tag{5.1}$$

(b) Hat $(f \circ \varphi)\varphi'$ eine Stammfunktion, so auch f und es gilt (5.1), falls $\varphi'(t) \neq 0$ in J.

(c) Ist f stetig in $I = [a, b]$, φ stetig differenzierbar in $J = [\alpha, \beta]$ mit $\varphi([\alpha, \beta]) \subseteq [\alpha, \beta]$, dann gilt

$$\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)\,dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt.$$

Beweis:

(a) Mit der Kettenregel: Sei $G(t) = F(\varphi(t))$. Dann ist

$$\begin{aligned} G'(t) &= F'(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) \\ &= f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) \end{aligned}$$

$\Rightarrow F(\varphi(t))$ ist Stammfunktion von $f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)$.

(b) φ ist injektiv. Die Umkehrfunktion sei ψ.
ψ ist differenzierbar mit

$$\psi'(s) = \left.\frac{1}{\varphi'(t)}\right|_{t=\psi(s)}$$

Setze

$$g(t) = f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) \text{ und } f(x) = g(\psi(x))\psi'(x)$$

Wende dann Teil (a) auf g mit Stammfunktion G an.
Dann hat $f = (g \circ \psi) \cdot \psi'$ eine Stammfunktion $F = (G \circ \psi)$.

(c) f hat Stammfunktion F, da f stetig ist.
$G(x) = F(\varphi(x))$ ist stetig differenzierbar mit $G'(x) = F'(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x) = f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)$.
Es ist also

$$\begin{aligned} \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)\,dx &= F(x)\Big|_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} \\ &= F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)) \\ &= G(\beta) - G(\alpha) \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\,dt. \end{aligned}$$

5.3.7 Beispiel

$$\int (\sin x)^3 \cdot e^{\cos x}\,dx = \left|\begin{array}{c}\text{Substitution:}\\ t=\cos x=\varphi(x)\\ \frac{dt}{dx}=\varphi'=-\sin x\\ dt=\varphi'(x)\,dx=-\sin x\,dx\end{array}\right|$$
$$\begin{aligned}
&= -\int e^t\cdot(1-t^2)\,dt\\
&= -e^t+\int t^2e^t\,dt\\
&= -e^t+t^2e^t-\int 2te^t\,dt\\
&= -e^t+t^2e^t-2te^t+2\int e^t\,dt\\
&= -e^t+(t^2-2t+2)e^t\\
&= e^t(t^2-2t+1)\\
&= e^t(t-1)^2\\
&= e^{\cos x}(\cos x-1)^2
\end{aligned}$$

5.3.8 Satz von Taylor mit Integralrestglied

f sei $(n+1)$-mal differenzierbar in I, $a\in I$. Dann ist

$$T_n(x;a)=\sum_{j=0}^{n}\frac{f^{(j)}(a)}{j!}(x-a)^j$$
$$f(x)=T_n(x;a)+R_n(x;a)$$

dabei gilt:

1. $R_n(x;a)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$ mit ξ zwischen a und x (*Lagrange-Restglied*, schon bewiesen in 4.4.5 auf Seite 87).

2. Ist $f^{(n+1)}$ integrierbar, so ist

$$R_n(x;a)=\int_a^x\frac{(x-t)^n}{n!}f^{(n+1)}(t)\,dt,$$

genannt *Integralrestglied*.

Beweis: mit Induktion nach n.

$n=0$**:** Es ist $f(x)=f(a)+\int_a^x f'(t)\,dt$ (Hauptsatz).

$(n-1) \mapsto n$**:** Es ist

$$\begin{aligned}
f(x) =& T_{n-1}(x;a) + \int\limits_a^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(t)\,dt \\
=& T_{n-1}(x;a) + \left(-\frac{(x-t)^n}{(n-1)!n} f^{(n)}(t)\right)\Bigg|_a^x \\
&+ \int\limits_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,dt \\
=& T_{n-1}(x;a) + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_n(x;a) \\
=& T_n(x;a) + R_n(x;a)
\end{aligned}$$

5.3.9 Satz von Bernstein

Ist $f \in C^\infty((-r,r))$ und ist $f^{(n)}(x) \geq 0$ für $-r < x < r$ für (fast) alle n, dann gilt in $(-r,r)$:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$$

Bemerkung: Der Satz gilt auch, falls $(-1)^n f^{(n)}(x) \geq 0$ in $-r < x < r$ für fast alle n.

Beweis: Für den Fall $f^{(n)}(x) \geq 0$ für alle n und x.
Sei zunächst $\mathbf{0 \leq x < r}$.
Dann ist $R_n(x;0;f) \geq 0$, d. h. $T_n(x;0) \leq f(x)$, denn

$$T_{n+1}(x;0) = T_n(x;0) + \underbrace{\frac{f^{(n+1)}(0)}{(n+1)!}}_{\geq 0} \cdot \underbrace{x^{n+1}}_{\geq 0} \geq T_n(x;0)$$

Damit ist auch in $0 \leq x < r$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n \leq f(x).$$

Es gilt:

$$R_n(x;0;f) \leq R_{n-1}(x;0;f) \leq \cdots \leq R_0(x;0;f)$$

Wähle nun zu x_0, $0 \leq x_0 < r$ ein $q > 1$ so, daß $q \cdot x_0 < r$ ist.
Setze $F(x) := f(q \cdot x)$ in $[0, r/q)$. Dann ist $F^{(n)}(x) = q^n f^{(n)}(qx)$, $F^{(n)}(x) \geq 0$, und es gilt

$$R_n(x;0;F) \leq R_0(x;0;F).$$

Daraus folgt dann

$$\begin{aligned}
R_n(x;0;f) &= \int\limits_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,dt \\
&= \int\limits_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} \cdot \frac{F^{(n+1)}(\frac{t}{q})}{q^n}\,dt
\end{aligned}$$

Einschub: Aus $q > 1$ folgt $\frac{t}{q} < t$.
Es ist $F^{(n+1)}(s) \geq 0$ und $F^{(n)}$ ist wachsend, also ist $F^{(n)}(t/q) \leq F^{(n)}(t)$.

$$\begin{aligned}
&\leq \frac{1}{q^n} \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} F^{(n+1)}(t)\, dt \\
&= \frac{1}{q^n} R_n(x;0;F) \\
&\leq \frac{1}{q^n} R_0(x;0;F) \to 0 \text{ für } n \to \infty.
\end{aligned}$$

Da $R_n(x;0;f) \geq 0$ ist,
gilt $R_n(x;0;f) \to 0$ für $n \to \infty$.
Also gilt für $0 \leq x < r$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = f(x).$$

Sei nun $-\mathbf{r} < \mathbf{x} \leq \mathbf{0}$.
Sei $t \leq 0$.
Dann ist $f^{(n)}(t) \leq f^{(n)}(-t)$,
da $f^{(n)}$ monoton wachsend ist.

$$\begin{aligned}
|R_n(x)| &= \left| \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\, dt \right| \\
&= \left| \begin{array}{c} \text{Subst.:} \\ s = -t \\ ds = -dt \end{array} \right| \\
&= \left| \int_0^{-x} \frac{(x+s)^n}{n!} f^{(n+1)}(-s)\, ds \right| \\
&\leq \int_0^{-x} \frac{(x+s)^n}{n!} f^{(n+1)}(s)\, ds \\
&= R_n(-x;0;f) \to 0 \text{ für } n \to \infty
\end{aligned}$$

$\Rightarrow R_n(x;f) \to 0$ für $n \to \infty$ auch für $-r < x \leq 0$.

5.3.10 Beispiel

$f(x) = (1-x)^\alpha$ für $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}_0$. Es ist

$$\begin{aligned}
f'(x) &= -\alpha(1-x)^{\alpha-1} \\
f^{(n)}(x) &= (-1)^n \alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)(1-x)^{\alpha-n} \\
f^{(n+1)}(x) &= (-1)^{n+1}\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)(\alpha-n)(1-x)^{\alpha-n-1} \\
&= (-1)^n(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)(1-x)^{\alpha-n} \cdot (-1)(\alpha-n)(1-x)^{-1} \\
&= f^{(n)}(x) \cdot \underbrace{(n-\alpha)}_{>0} \cdot \underbrace{(1-x)^{-1}}_{>0}
\end{aligned}$$

für $n > \alpha$ und $-1 < x < 1$. Also haben für $n > \alpha$ und $-1 < x < 1$ alle Ableitungen immer das selbe Vorzeichen. Mit dem Satz von Bernstein gilt nun in $-1 < x < 1$

$$(1-x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)x^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n.$$

Weitere Beispiele: $\log(1+x)$ oder $\arcsin x$: Für $-1 < x < 1$ gilt:

$$(\arcsin x)' = (1-x^2)^{-1/2} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-1/2}{n} (-1)^n x^{2n}$$

Also ist

$$\arcsin x = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-1/2}{n} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

5.4 Integration von rationalen Funktionen

5.4.1 Problem

Sei $R(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ mit teilerfremden Polynomen P und Q, d. h. es gibt kein nicht konstantes Polynom H mit $P(x) = P_1(x)H(x)$ und $Q(x) = Q_1(x)H(x)$. Was ist dann

$$\int R(x)\,dx?$$

5.4.2 Prinzip

1. Schritt: Polynomdivision mit Rest:

$$R(x) = P_0(x) + \frac{P_1(x)}{Q(x)} \text{ mit } \mathrm{Grad}(P_1) < \mathrm{Grad}(Q).$$

2. Schritt: Zerlege Q in elementare Faktoren der Form $(x-\xi)^r$ und/oder $(x^2+2bx+a)^s$ mit $a > b^2$ (Die Existenz der Zerlegung wird in 6.3.14 auf der Seite 135 gezeigt).

3. Schritt: Schreibe $\dfrac{P_1(x)}{Q(x)}$ als endliche Summe von Funktionen

$$\frac{\alpha_1}{x-\xi} + \dots + \frac{\alpha_r}{(x-\xi)^r}$$

bzw.

$$\frac{\beta_1 + \gamma_1 x}{x^2+2bx+a} + \dots + \frac{\beta_s + \gamma_s x}{(x^2+2bx+a)^s}$$

(Partialbruchzerlegung, Beweis in 6.3.16 auf Seite 137)

4. Schritt: Bestimme Stammfunktionen für

$$\frac{\alpha_j}{(x-\xi)^j} \text{ und } \frac{\beta_j + \gamma_j x}{(x^2+2bx+a)^j}.$$

5.4.3 Beispiele

1. Beispiel:

$$R(x) = \frac{x+2}{x^4 - x^2}$$

1. Schritt: entfällt

2. Schritt: Es ist $x^4 - x^2 = x^2(x^2-1) = x^2(x-1)(x+1)$.

3. Schritt:

$$R(x) = \frac{A}{x^2} + \frac{B}{x} + \frac{C}{x-1} + \frac{D}{x+1}$$

Was sind die Werte für A, B, C und D?. Es ist

$$\begin{aligned}
A &= \lim_{x\to 0} x^2 R(x) \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{x+2}{x^2-1} = -2 \\
C &= \lim_{x\to 1} (x-1)R(x) \\
&= \lim_{x\to 1} \frac{x+2}{x^2(x+1)} = \frac{3}{2} \\
D &= \lim_{x\to -1} (x+1)R(x) \\
&= \lim_{x\to -1} \frac{x+2}{x^2(x-1)} = -\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

B ist so nicht berechenbar. Bis hierhin ist folgendes bekannt:

$$R(x) = \frac{-2}{x^2} - \frac{B}{x} + \frac{3/2}{x-1} + \frac{-1/2}{x+1}.$$

Setze einen speziellen Wert ein, z. B. $x = 2$:

$$\begin{aligned}
\frac{4}{16-4} &= \frac{-2}{4} + \frac{B}{2} + \frac{3/2}{1} + \frac{-1/2}{3} \\
B &= 2 \cdot \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \frac{3}{2} + \frac{1}{6}\right) = -1
\end{aligned}$$

4. Schritt:

$$\begin{aligned}
\int R(x)\,dx &= -2\int \frac{dx}{x^2} - \int \frac{dx}{x} + \frac{3}{2}\int \frac{dx}{x-1} - \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x+1} \\
&= \frac{2}{x} - \log|x| + \frac{3}{2}\log|x-1| - \frac{1}{2}\log|x+1|
\end{aligned}$$

2. Beispiel:

$$R(x) = \frac{x+3}{x^5 - x^4 + 2x^3 - 2x^2 + x - 1}$$

1. Schritt: entfällt

2. Schritt: Es ist $Q(x) = x^5 - x^4 + 2x^3 - 2x^2 + x - 1 = (x-1)(x^2+1)^2$.

3. Schritt:

$$R(x) = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+1} + \frac{Dx+E}{(x^2+1)^2}$$

$$A = \lim_{x\to 1}(x-1)R(x) = \lim_{x\to 1} \frac{x+3}{(x^2+1)^2} = 1$$

Was sind B, C, D und E?
Der Hauptnenner von R ist $(x-1)(x^2+1)^2$.
Der Zähler ist $A(x^2+1)^2+(Bx+C)(x^2+1)(x-1)+(Dx+E)(x-1)$.
Für den Zähler gilt also

$$\begin{aligned} x+3 =& x^4(A+B)+x^3(-B+C)+x^2(2A-C+B+D) \\ &+x(-B+C-D+E)+(A-C-E) \end{aligned}$$

Es bildet sich ein lineares Gleichungssystem mit

$$\begin{array}{lccccccl} x^4: & A & +B & & & & =0 \\ x^3: & & -B & +C & & & =0 \\ x^2: & 2A & +B & -C & +D & & =0 \\ x^1: & & -B & +C & -D & +E & =1 \\ x^0: & A & & -C & & -E & =3 \end{array}$$

Das Ergebnis ist

$$A=1 \qquad B=-1 \qquad C=-1 \qquad D=-2 \qquad E=-1$$

Also ist

$$R(x)=\frac{1}{x-1}-\frac{x+1}{x^2+1}-\frac{2x+1}{(x^2+1)^2}$$

4. Schritt:

$$\begin{aligned} \int R(x)\,dx =& \int \frac{dx}{x-1}-\frac{1}{2}\int\frac{2x}{x^2+1}\,dx-\int\frac{dx}{x^2+1} \\ &-\int\frac{2x}{(x^2+1)^2}\,dx-\int\frac{dx}{(x^2+1)^2} \\ =& \log|x-1|-\frac{1}{2}\log(1+x^2)-\arctan x \\ &-\cdots-\cdots \end{aligned}$$

Die letzten beiden Terme sind leider noch nicht berechenbar.

5.4.4 Allgemeines zum 4. Schritt

Typ I:

$$\int\frac{dx}{(x-\xi)^p} \text{ für } p=1,2,\ldots$$

Für $p=1$ ist

$$\int\frac{dx}{x-\xi}=\log|x-\xi| \ (x\neq\xi)$$

und für $p\geq 2$ ist

$$\begin{aligned} \int\frac{dx}{(x-\xi)^p} &= \frac{1}{(x-\xi)^{p-1}}\cdot\left(\frac{1}{1-p}\right) \\ &= \frac{1}{1-p}\cdot(x-\xi)^{-p+1}. \end{aligned}$$

Typ II:

$$\begin{aligned}
\int \frac{A+Bx}{(x^2+2bx+a)^p}\,dx &= \int \frac{A+Bx}{((x+b)^2+a-b^2)^p}\,dx \\
&= \left| \begin{array}{c} \text{setze } a-b^2 = D^2,\ D>0 \\ \text{Substitution:} \\ x+b = Dt \\ x = Dt-b \\ dx = D\,dt \end{array} \right| \\
&= \int \frac{A+B(Dt-b)}{((Dt)^2+D^2)^p} D\,dt \\
&= \int \frac{A+BDt-Bb}{(D^2(t^2+1))^p} D\,dt \\
&= \alpha \int \frac{dt}{(t^2+1)^p} + \beta \int \frac{2t}{(t^2+1)^p}\,dt
\end{aligned}$$

Nun müssen die beiden Integrale berechnet werden. Zuerst

$$\int \frac{2t}{(t^2+1)^p}\,dt.$$

Für $p = 1$ ist

$$\int \frac{2t}{1+t^2}\,dt = \log(1+t^2)$$

und für $p > 1$ ist

$$\int \frac{2t}{(1+t^2)^p}\,dt = \frac{1}{1-p} \cdot \frac{1}{(1+t^2)^{p-1}}.$$

Nun die Berechnung von

$$\int \frac{dt}{(1+t^2)^p}:$$

Für $p = 1$ ist

$$\int \frac{dt}{1+t^2} = \arctan t = J_1$$

und für $p \geq 2$ ist

$$\begin{aligned}
J_p &= \int \frac{dt}{(1+t^2)^p} \\
&= \int \underbrace{1}_{u'} \cdot \underbrace{\frac{1}{(1+t^2)^p}}_{v}\,dt \\
&= \frac{t}{(1+t^2)^p} - \int t(-p)(1+t^2)^{-p-1}2t\,dt \\
&= \frac{t}{(1+t^2)^p} + 2p \int \frac{(t^2+1)-1}{(1+t^2)^{p+1}}\,dt \\
&= \frac{t}{(1+t^2)^p} + 2pJ_p - 2pJ_{p+1}
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow 2pJ_{p+1} = (2p-1)J_p + \frac{t}{(1+t^2)^p}$$

Es ergibt sich damit die Rekursionsformel

$$J_{p+1} = \left(1 - \frac{1}{2p}\right) J_p + \frac{1}{2p} \cdot \frac{t}{(1+t^2)^p}$$

z. B. ist

$$\begin{aligned} J_2 &= \int \frac{dt}{(1+t^2)^2} \\ &= \left(1 - \frac{1}{2}\right) J_1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{t}{1+t^2} \\ &= \frac{1}{2} \arctan t + \frac{1}{2} \cdot \frac{t}{1+t^2}. \end{aligned}$$

5.4.5 Auf rationale Funktionen zurückführbare Integrale

(a)

$$\int R(e^{ax})\, dx,\ R \text{ rational und } a \neq 0$$

$$\begin{aligned} \int R(e^{ax})\, dx &= \left| \begin{array}{c} \text{Subst.:} \\ t = e^{ax} \\ \frac{dt}{dx} = ae^{ax} = at \end{array} \right| \\ &= \frac{1}{a} \int R(t) \frac{1}{t}\, dt = \int R_1(t)\, dt \end{aligned}$$

Beispiel:

$$\begin{aligned} \int \frac{e^{2x}}{\cosh x} &= \frac{e^{2x}}{\frac{e^x + e^{-x}}{2}}\, dx \\ &= 2 \int \frac{e^{3x}}{e^{2x}+1}\, dx \\ &= \left| \begin{array}{c} t = e^x \\ \frac{dt}{t} = dx \end{array} \right| \\ &= 2 \int \frac{t^3}{t^2+1} \cdot \frac{1}{t}\, dt \\ &= 2 \int \frac{t^2+1-1}{t^2+1}\, dt \\ &= 2 \int 1 - \frac{1}{t^2+1}\, dt \\ &= 2t - 2 \arctan t \\ &= 2e^x - 2 \arctan(e^x) \end{aligned}$$

(b)

$$\int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right) dx \text{ mit } n \geq 2 \text{ und } ad - bc \neq 0$$

$$\int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right) = \left|\begin{array}{c} \text{Substitution:} \\ \frac{ax+b}{cx+d} = t^n \\ ax+b = (cx+d)t^n \\ x(a-ct^n) = dt^n - b \\ x = \frac{-b+dt^n}{a-ct^n} \\ \frac{dx}{dt} = \frac{-ad+bc}{(a-ct^n)^2} nt^{n-1} \end{array}\right|$$

$$= \int R\left(\frac{dt^n-b}{a-ct^n}, t\right) \cdot \frac{bc-ad}{(a-ct^n)^2}\, dt$$

$$= \int R_1(t)\, dt$$

Beispiel:

$$\int \sqrt{\frac{x}{x+1}}\, dx = \left|\begin{array}{c} \frac{x}{x+1} = t^2 \\ x = t^2(x+1) \\ x(1-t^2) = t^2 \\ x = \frac{t^2}{1-t^2} \\ \frac{dx}{dt} = \frac{2t}{(1-t^2)^2} \end{array}\right|$$

$$= \int t \frac{2t}{(1-t^2)^2}\, dt$$

$$= 2\int \frac{t^2}{(1-t^2)^2}\, dt$$

(c)

$$\int R(\cos x, \sin x)\, dx$$

$$\int R(\cos x, \sin x)\, dx = \left|\begin{array}{c} \text{Substitution:} \\ t = \tan(x/2) \\ \frac{dt}{dx} = (1+t^2)\frac{1}{2} \\ \sin x = \frac{2r}{1+t^2} \; \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \end{array}\right|$$

$$= \int R\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2}\right) \cdot \frac{2}{1+t^2}\, dt$$

$$= \int R_1(t)\, dt$$

Beispiel:

$$\int \frac{dx}{2+\cos x} = \left|\begin{array}{l} \text{Substitution:} \\ t = \tan(x/2) \end{array}\right|$$

$$= \int \frac{\frac{2}{1+t^2}}{2+\frac{1-t^2}{1+t^2}}\, dt = 2\int \frac{dt}{3+t^2}$$

$$= \left|\begin{array}{c} \text{Substitution:} \\ t = \sqrt{3}\cdot u \\ \frac{dt}{du} = \sqrt{3} \end{array}\right|$$

$$= 2\int \frac{1}{3+3u^2}\sqrt{3}\, du$$

$$= \frac{2\sqrt{3}}{3}\int \frac{du}{1+u^2}$$

$$= \frac{2\sqrt{3}}{3} \arctan u = \frac{2\sqrt{3}}{3} \arctan\left(\frac{t}{\sqrt{3}}\right)$$
$$= \frac{2\sqrt{3}}{3} \arctan\left(\frac{\tan(x/2)}{\sqrt{3}}\right)$$

(d)

$$\int R(x, \sqrt{ax^2+2bx+c})\,dx \text{ mit } a \neq 0$$

Zuerst quadratisches Ergänzen des Termes unter der Wurzel

$$ax^2 + 2bx + c = a\left(x^2 + \frac{2b}{a}x + \frac{c}{a}\right)$$
$$= a\left(\left(x+\frac{b}{a}\right)^2 \underbrace{-\frac{b^2}{a^2} + \frac{c}{a}}_{=:\Delta}\right)$$

$\Delta = 0$ wurde schon behandelt, denn in diesem Fall handelt es sich um eine rationale Funktion von x.

(i) $a > 0$, $\Delta = D^2 > 0$:

$$\int R\left(x, \sqrt{ax^2+2bx+c}\right)\,dx = \left|\begin{array}{c}\text{Substitution:}\\ x+\frac{b}{a} = Dt\\ dx = D\,dt\end{array}\right|$$
$$= \int R\left(Dt - \frac{b}{a}, \sqrt{a(t^2+1)D^2}\right)\cdot D\,dt$$
$$= \int \tilde{R}\left(t, \sqrt{t^2+1}\right)\,dt$$

(ii) $a > 0$, $\Delta = -D^2 < 0$: Dann ist

$$ax^2 + 2bx + c = a\left(\left(x+\frac{b}{a}\right)^2 - D^2\right)$$

Substituiere dann $x + \frac{b}{a} = DT$, $dx = D\,dt$:

$$\int R\left(x, \sqrt{ax^2+2bx+c}\right)\,dx = \int R\left(Dt - \frac{b}{a}, \sqrt{aD^2(t^2-1)}\right)\cdot D\,dt$$
$$= \int \tilde{R}\left(, \sqrt{t^2-1}\right)$$

(iii) $a < 0$, $\Delta = -D^2 < 0$:
Substituiere hier $x + \frac{b}{a} = Dt$, $dx = D\,dt$:

$$\int R\left(x, \sqrt{ax^2+2bx+c}\right)\,dx = \int R\left(Dt - \frac{b}{a}, \sqrt{a(D^2t^2 - D^2)}\right)\cdot D\,dt$$
$$= \int R\left(Dt - \frac{b}{a}, \sqrt{-aD^2}\sqrt{1-t^2}\right)\cdot D\,dt$$
$$= \int \tilde{R}\left(t, \sqrt{1-t^2}\right)\,dt$$

Beispiele zu den 3 Fällen:

(i)

$$\int \sqrt{x^2+2x+3}\,dx = ?$$

Es ist $x^2+2x+3=(x+1)^2+2$, es liegt Typ (i) vor.
Substituiere $x+1=t\sqrt{2}$, $dx=\sqrt{2}\,dt$:

$$\int \cdots = \int \sqrt{2(t^2+1)}\sqrt{2}\,dt = 2\int \sqrt{t^2+1}\,dt$$

(ii)

$$\int \sqrt{x^2+2x-3}\,dx = ?$$

Es ist $x^2+2x-3=(x+1)^2-4$, es liegt Typ (ii) vor.
Substituiere $x+1=2t$, $dx=2\,dt$:

$$\int \cdots = \int \sqrt{4(t^2-1)}\cdot 2\,dt = 4\int \sqrt{t^2-1}\,dt$$

(iii)

$$\int \sqrt{-x^2+2x}\,dx = ?$$

Es ist $-x^2+2x=-(x^2+2x)=-((x-1)^2-1)$, es liegt Typ (iii) vor.
Substituiere $x-1=t$, $dx=dt$:

$$\int \cdots = \int \sqrt{-(t^2-1)}\,dt = \int \sqrt{1-t^2}\,dt$$

Restliche Integrale in den 3 Fällen:

(i) $\sqrt{t^2+1}$. Substitution: $t=\sinh u$, $dt=\cosh u\,du$, $t^2+1=\sinh^2 u+1=\cosh^2 u$

$$\int \ldots = \int \tilde{R}(\sinh u, \cosh u)\cdot \cosh u\,du = \int \hat{R}(\sinh u,\cosh u)\,du = \int \check{R}(e^u)\,du$$

Am Beispiel:

$$\begin{aligned}
2\int \sqrt{1+t^2}\,dt =& 2\int \cosh u\cdot\cosh u\,du \\
=& 2\int \left(\frac{e^u+e^{-u}}{2}\right)^2 du \\
=& \frac{1}{2}\int \left(e^{2u}+2+e^{-2u}\right)\,du \\
=& \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}e^{2u}+2u-\frac{1}{2}e^{-2u}\right) \\
=& \frac{1}{4}\exp\left(2\operatorname{arsinh}\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right)+\operatorname{arsinh}\frac{x+1}{\sqrt{2}} \\
& -\frac{1}{4}\exp\left(-2\operatorname{arsinh}\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right)
\end{aligned}$$

(ii) $\sqrt{t^2-1}$.
Substitution: $t = \cosh u$, $dt = \sinh u\, du$, $t^2 - 1 = \cosh^2 u - 1 = \sinh^2 u$:

$$\begin{aligned}\int \ldots &= \int \tilde{R}(\sinh u, \cosh u) \cdot \sinh u\, du\\ &= \int \hat{R}(\sinh u, \cosh u)\, du\\ &= \int \check{R}(e^u)\, du\end{aligned}$$

Am Beispiel:

$$\begin{aligned}4\int \sqrt{t^2-1}\, dt &= 4\int \sinh u \cdot \sinh u\, du\\ &= \int (e^u - e^{-u})^2\, du = \cdots\end{aligned}$$

(iii) $\sqrt{1-t^2}$.
Substitution: $t = \sin u$ (oder $t = \cos u$), $dt = \cos u\, du$, $1 - t^2 = \cos^2 u$.

$$\begin{aligned}\int \ldots &= \int \tilde{R}(\sin u, \cos u) \cdot \cos u\, du\\ &= \int \hat{R}(\sin u, \cos u) = \cdots\end{aligned}$$

Am Beispiel:

$$\int \sqrt{1-t^2}\, dt = \int \cos^2 u\, du = \cdots$$

5.5 Uneigentliche Integrale

5.5.1 Definition

Sei I ein Intervall mit den Endpunkten a und b, $f\colon I \to \mathbb{R}$. Die Funktion f heißt *lokal integrierbar*, wenn sie über jedes Intervall $[\alpha, \beta] \subseteq I$ integrierbar ist. f heißt *uneigentlich integrierbar* über I, wenn

$$\lim_{\alpha \to a} \int_{\alpha}^{c} f(x)\, dx + \lim_{\beta \to b} \int_{c}^{\beta} f(x)\, dx =: \int_{a}^{b} f(x)\, dx$$

für beliebiges $c \in I$ existiert. $\int_a^b f(x)\, dx$ ist dann das uneigentliche Integral von f über I. Man sagt auch $\int_a^b f(x)\, dx$ konvergiert (sonst: divergiert).

5.5.2 Bemerkungen

(1) Ist $I = [a, b]$ und f auf I lokal integrierbar, dann ist f integrierbar über $[a, b]$, insbesondere ist $|f(x)| \leq M$ in $[a, b]$.

Für $a < \alpha < c$ gilt:

$$\begin{aligned}\left|\int_a^c f(x)\,dx - \int_\alpha^c f(x)\,dx\right| &= \left|\int_a^\alpha f(x)\,dx\right| \\ &\leq (\alpha - a)M \\ &\to 0 \text{ für } \alpha \to a\end{aligned}$$

d. h. das uneigentliche Integral ist gleich dem Riemann-Integral.

(2) Die Sätze beziehen sich meist auf $[a,b)$. Genauso gelten sie für $(a,b]$ und (a,b).

(3) Ist f uneigentlich integrierbar über $(a_0,a_1),(a_1,a_2),\ldots,(a_{n-1},a_n)$, so heißt f uneigentlich integrierbar über (a_0,a_n) mit

$$\int_{a_0}^{a_n} f(x)\,dx = \sum_{j=1}^n \int_{a_{j-1}}^{a_j} f(x)\,dx.$$

5.5.3 Beispiele

(1) $[a,b) = [0,\infty)$, $f(x) = e^{-x}$:

$$\begin{aligned}\int_0^\infty e^{-x}\,dx &= \lim_{\beta\to\infty} \int_0^\beta e^{-x}\,dx \\ &= \lim_{\beta\to\infty} -e^{-x}\Big|_0^\beta \\ &= \lim_{\beta\to\infty} (1 - e^{-\beta}) = 1\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} &= \lim_{\alpha\to 0} \int_\alpha^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} \\ &= \lim_{\alpha\to 0} 2\sqrt{x}\Big|_\alpha^1 \\ &= \lim_{\alpha\to 0} 2 - 2\sqrt{\alpha} = 2\end{aligned}$$

(3)

$$\int_\alpha^1 \frac{dx}{x} = \log x\Big|_\alpha^1 = -\log\alpha \to \infty \text{ für } \alpha \to 0$$

divergiert.

(4)

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x} \text{ divergiert.}$$

(5) Für welche c ist

$$\int_0^1 x^{-c}$$

konvergent? Sei zuerst $c \geq 1$. Dann ist $x^{-c} \geq x^{-1}$ in $(0,1] \Rightarrow$ Divergenz für $c \geq 1$. Sei nun $c < 1$:

$$\begin{aligned}\int_\alpha^1 x^{-c}\,dx &= \left.\frac{x^{-c+1}}{-c+1}\right|_\alpha^1 \\ &= \frac{1}{1-c}(1-\alpha^{1-c}) \to \frac{1}{1-c} \text{ für } \alpha \to 0\end{aligned}$$

(6) Aufgabe: Für welche c ist folgendes Integral konvergent:

$$\int_1^\infty x^{-c}\,dx$$

5.5.4 Cauchykriterium

$\int\limits_a^b f(x)\,dx$ konvergiert genau dann in $I = [a,b)$, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein β_0 gibt mit

$$|F(\beta') - F(\beta)| = \left|\int_\beta^{\beta'} f(x)\,dx\right| < \varepsilon$$

für $\beta_0 < \beta < \beta' < b$.

Beweis: Setze $F(x) = \int\limits_a^x f(t)\,dt$ für $a \leq x < b$:

$$\int_a^b f(x)\,dx \text{ existiert} \iff \lim_{x\to b} F(x) \text{ existiert}$$

Dann Cauchykriterium für Grenzwerte.

5.5.5 Dirichletkriterium

f sei stetig differenzierbar in $[a,\infty)$ mit $f' \leq 0$ und $f(x) \to 0$. g sei stetig in $[a,\infty)$ und $G(x) = \int\limits_a^x g(t)\,dt \leq M$. Dann konvergiert

$$\int_a^\infty f(x) \cdot g(x)\,dx.$$

Beweis:

$$\begin{aligned}\int\limits_{\beta}^{\beta'} f(x)g(x)\,dx &= f(x)G(x)\Big|_{\beta}^{\beta'} - \int\limits_{\beta}^{\beta'} f'(x)G(x)\,dx \\ &= f(\beta')G(\beta') - f(\beta)G(\beta) - \int\limits_{\beta}^{\beta'} f'(x)G(x)\,dx\end{aligned}$$

Sei nun $\varepsilon > 0$. Dazu existiert ein β_0 mit $0 \leq f(x) < \varepsilon$ für $x \geq \beta_0$. Es ist auch $|G(x)| \leq M$ für alle $x \geq a$.
Sei nun $\beta_0 < \beta < \beta'$:

$$\begin{aligned}\int\limits_{\beta}^{\beta'} f(x)g(x)\,dx &\leq 2\varepsilon \cdot M + \int\limits_{\beta}^{\beta'} (-f'(x)) \cdot M\,dx \\ &= 2M\varepsilon + M(f(\beta) - f(\beta')) \\ &< 4M\varepsilon\end{aligned}$$

Mit dem Cauchykriterium folgt dann die Konvergenz des Integrals.

5.5.6 Beispiele

(1) Das Integral $\int\limits_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx$ konvergiert.

Es ist $\frac{\sin x}{x} \to 1$ für $x \to 0$, also existiert $\int\limits_0^1 \frac{\sin x}{x}\,dx$.
Zeige nun, daß das Integral $\int\limits_1^\infty \frac{1}{x} \sin x\,dx$ existiert:
Setze $f(x) = \frac{1}{x}$ und $g(x) = \sin x$. Es ist dann

$$|G(x)| = \left|\int\limits_1^x \sin t\,dt\right| = |\cos 1 - \cos x| \leq 2$$

und $f(x) \to 0$ für $x \to \infty$ mit $f' \leq 0$.
Also existiert das Integral nach Dirichlet.

(2) Das Integral $\int\limits_0^\infty \frac{|\sin x|}{x}\,dx$ divergiert.
Sei $n \in \mathbb{N}$. Dann ist

$$\begin{aligned}\int\limits_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{|\sin x|}{x}\,dx &\geq \frac{1}{\pi(n+1)} \int\limits_{n\pi}^{(n+1)\pi} |\sin x|\,dx \\ &= \frac{1}{\pi(n+1)} \int\limits_0^\pi \sin x\,dx \\ &= \frac{2}{\pi(n+1)}\end{aligned}$$

Also ist

$$\int_{\pi}^{(N+1)\pi} \frac{|\sin x|}{x}\,dx \leq \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n+1}$$

$$\to \infty \text{ für } N \to \infty$$

Also divergiert das Integral.

5.5.7 Definition: Absolute Konvergenz

Ist f lokal integrierbar in I und konvergiert $\int_a^b |f(x)|\,dx$, dann heißt f *absolut integrierbar* und $\int_a^b f(x)\,dx$ heißt dann absolut konvergent.

Bemerkung: Aus der absoluten Konvergenz folgt die Konvergenz des Integrals: Für $\varepsilon > 0$ und $\beta_0 < \beta < \beta' < b$ ist

$$\left|\int_{\beta}^{\beta'} f(x)\,dx\right| \leq \int_{\beta}^{\beta'} |f(x)|\,dx < \varepsilon.$$

5.5.8 Majorantenkriterium

Ist f lokal integrierbar über I, gilt $|f(x)| \leq g(x)$ in I und ist $\int_a^b g(x)\,dx$ konvergent, so ist auch $\int_a^b |f(x)|\,dx$ konvergent.

Beweis: „bei b“: Für $\beta_0 < \beta < \beta' < b$ ist

$$\left|\int_{\beta}^{\beta'} f(x)\,dx\right| \leq \int \beta^{\beta'} g(x)\,dx < \varepsilon.$$

5.5.9 Nützliche Majoranten

$[1,\infty)$**:** $x^{-\alpha}$ für $\alpha > 1$

$[2,\infty)$**:** $\frac{1}{x}](\log x)^{-\alpha}$ für $\alpha > 1$

$[3,\infty)$**:** $\frac{1}{x}\frac{1}{\log x}\frac{1}{(\log(\log x))^{\alpha}}$ für $\alpha > 1$

$(0,1]$**:** $x^{-\alpha}$ für $\alpha < 1$

$(0,\frac{1}{2}]$**:** $\frac{1}{x}|\log x|^{-\alpha}$ für $\alpha < 1$

$(0,\frac{1}{3}]$**:** $\frac{1}{x}\frac{1}{|\log x|}|\log(\log x)|^{-\alpha}$ für $\alpha < 1$

Beweis: für $\frac{1}{x}(\log x)^{-\alpha}$. Es ist

$$\int_2^b \frac{dx}{x(\log x)^\alpha} = \left| \begin{array}{c} \text{Subst.:} \\ x = e^t \\ dx = e^t\,dt \end{array} \right| = \int_{\log 2}^{\log b} \frac{dt}{t^\alpha}$$

für $b \to \infty$ ist dann

$$\int_2^\infty \frac{dx}{x(\log x)^\alpha} = \int_{\log 2}^\infty \frac{dt}{t^\alpha}.$$

Dieses Integral existiert, da $\alpha > 1$ ist (es existiert nicht für $\alpha \leq 1$).

5.5.10 Satz über die majorisierte Konvergenz

f_n sei uneigentlich integrierbar über I, $|f_n(x)| \leq g(x)$ in I für alle n und $\int_a^b g(x)\,dx$ existiere. Außerdem konvergiere f_n gleichmäßig gegen f in jedem $[\alpha, \beta] \subseteq I$. Dann ist f absolut integrierbar und es gilt:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx$$

Beweis: f ist absolut integrierbar, da f über jedem Intervall $[\alpha, \beta] \subseteq I$ Riemann-integrierbar ist und $|f(x)| \leq g(x)$ ist.
Sei $\varepsilon > 0$. Wähle $\alpha > a$ und $\beta < b$ so, daß

$$\int_a^\alpha g(x)\,dx + \int_\beta^b g(x)\,dx < \varepsilon$$

ist. Wähle n_0 so, daß für $n \geq n_0$ und $\alpha \leq x \leq \beta$

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{\beta - \alpha}$$

ist. Dies ist möglich, da gleichmäßige Konvergenz vorliegt. Zusammen ist dann

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f(x) - f_n(x)\,dx \right| &\leq \int_a^\alpha 2g(x)\,dx + \int_\beta^b 2g(x)\,dx + \int_\alpha^\beta \frac{\varepsilon}{\beta - \alpha}\,dx \\ &< 2\varepsilon + \varepsilon = 3\varepsilon \text{ für } n \geq n_0 \end{aligned}$$

5.5.11 Beispiel: Die Gammafunktion

(Benannt nach J. B. Gamma, 1743-1807)

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1}\,dt$$

(1) Γ ist definiert und stetig in $0 < x < \infty$.

(2) $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$, insbesondere ist $\Gamma(n+1) = n!$ für $n \in \mathbb{N}_0$.

Beweis:

(1) Sei $x > 0$ fest. Dann ist $e^{-t}t^{x-1}$ stetig bzgl. $t \in (0,\infty)$ und lokal integrierbar in $(0,\infty)$. Es ist

$$e^{-t}t^{x-1} \leq \left\{ \begin{array}{ll} t^{x-1} & \text{für } 0 < t \leq 1 \\ e^{-t}t^{x-1} & \text{für } t \geq 1 \end{array} \right\} = g(t).$$

g ist eine konvergente Majorante, denn es ist

$$\int_0^1 \frac{dt}{t^\alpha} \text{ existiert für } \alpha < 1,\ \alpha = 1 - x < 1$$

und

$$\underbrace{\frac{t^{x-1+2}}{e^t}}_{\leq C \text{ für } t \geq t_0} \to 0 \text{ für } t \to \infty$$

Also ist $e^{-t}t^{x-1} \leq C/t^2$ für $t \geq t_0$.

Stetigkeit im Punkt $x_0 > 0$:
Zeige, daß aus $x_n \to x_0$ die Aussage $\Gamma(x_n) \to \Gamma(x_0)$ folgt.
Wähle $x_0, x_n \in [a,b] \subseteq (0,\infty)$:

$$\begin{aligned} \Gamma(x_n) - \Gamma(x_0) &= \int_0^\infty e^{-t}t^{x_n-1}\,dt - \int_0^\infty e^{-t}t^{x_0-1}\,dt \\ &\overset{?}{\to} 0 \text{ für } n \to \infty \end{aligned}$$

Gilt hier also

$$\int_0^\infty f_n(t)\,dt \longrightarrow \int_0^\infty f(t)\,dt?$$

Sei $t > 0$ und setze $\varphi(x) = e^{-t}t^{x-1}$. Es ist dann

$$\begin{aligned} |\varphi(x_n) - \varphi(x_0)| &= |x_n - x_0| \cdot |\varphi'(\xi_n)| \\ &\leq |x_n - x_0| \cdot C \text{ für alle } t \in [\alpha,\beta], \end{aligned}$$

denn es ist

$$\varphi'(x) = e^{-t}\frac{1}{x}\frac{d}{dx}e^{x\log t} = e^{-t}\frac{1}{t}\log t \cdot t^x,$$

also

$$|\varphi'(x)| \leq \begin{cases} 1\frac{1}{\alpha}|\log\alpha| & \text{für } \alpha \leq t < 1 \\ e^{-1}(\log\beta)\beta^b & \text{für } 1 \leq t \leq \beta \end{cases}$$

Setze dann

$$C = \max\left(\frac{|\log\alpha|}{\alpha}, \frac{(\log\beta)\beta^b}{e}\right).$$

Damit ist dann für $a \leq x_0, x_n \leq b$ und $a \leq \xi_n \leq b$:

$$|e^{-t}t^{x_n-1} - e^{-t}t^{x_0-1}| \leq C \cdot \underbrace{|x_n - x_0|}_{\substack{\to 0 \\ \text{für } n \to \infty}} \text{ für } \alpha \leq t \leq \beta$$

Also konvergiert $e^{-t}t^{x_n-1}$ gleichmäßig in $\alpha \le t \le \beta$ für $n \to \infty$ gegen $e^{-t}t^{x-1}$.
Suche nun eine Majorante $g(t)$ für $f_n(t)$:

$$\begin{aligned} f_n(t) = e^{-t}t^{x_n-1} &= \begin{cases} t^{a-1} & \text{für } 0 < t \le 1 \\ e^{-t}t^{b-1} & \text{für } t > 1 \end{cases} \\ &= g(t) \end{aligned}$$

Das Integral $\int\limits_0^\infty g(x)\,dx$ konvergiert. Für die Stetigkeit nun: Majorisierte Konvergenz.

(2) Es ist

$$\Gamma(x+1) = \int\limits_0^\infty e^{-t}t^x\,dt$$

und

$$\begin{aligned} \int\limits_\alpha^\beta e^{-t}t^x\,dt &= -e^{-t}t^x\Big|_\alpha^\beta + \int\limits_\alpha^\beta e^{-t}xt^{x-1}\,dt \\ &= e^{-\alpha}\alpha^x - e^{-\beta}\beta^x + x\int\limits_\alpha^\beta e^{-t}t^{x-1}\,dt \\ &\to x\Gamma(x) \text{ für } \alpha \to 0 \text{ und } \beta \to 0 \end{aligned}$$

Also gilt:

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$$

Induktionsanfang: $\Gamma(1) = \int\limits_0^\infty e^{-t}\,dt = 1$
Induktionsschluß: $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = n \cdot (n-1)! = n!$

5.5.12 Integralkriterium für Reihen

Sei $f\colon [p,\infty) \to (0,\infty)$ monoton fallend mit $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$. Dann konvergieren bzw. divergieren

$$\sum_{n=p}^\infty f(n) \text{ und } \int\limits_p^\infty f(x)\,dx$$

gleichzeitig.
Im Konvergenzfall gilt:

$$\sum_{n=p+1}^\infty f(n) \le \int\limits_p^\infty f(x)\,dx \le \sum_{n=p}^\infty f(n)$$

Anwendungsbeispiele:

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^\alpha}$$

$$\sum_{n=2}^\infty \frac{1}{n(\log n)^\alpha}$$

konvergieren für $\alpha > 1$.

Beweis: Sei $n \leq x \leq n+1$. Dann ist $f(n+1) \leq f(x) \leq f(n)$ und

$$f(n+1) \leq \int\limits_{n}^{n+1} f(x)\,dx \leq f(n) \text{ für } n = p, \ldots, p+1, \ldots, N$$

und

$$\sum_{n=p+1}^{N+1} f(n) = \sum_{n=p}^{N} f(n+1) \leq \int\limits_{p}^{N} f(x)\,dx \leq \sum_{n=p}^{N} f(n).$$

Sei nun die Reihe konvergent. Dann ist

$$\sum_{n=p}^{N} f(n) \leq C \text{ für alle } N$$

$$\Rightarrow \int\limits_{p}^{N} f(x)\,dx \leq C \text{ für alle } N \;\Rightarrow \int\limits_{p}^{\infty} f(x)\,dx \text{ konvergiert.}$$

Sei andersherum das Integral konvergent. Dann ist

$$\int\limits_{p}^{N} f(x)\,dx \leq C \text{ für alle N,}$$

und es folgt

$$\sum_{n=p+1}^{N} f(x) \leq C \text{ für alle } N \;\Rightarrow \sum_{n=p+1}^{\infty} f(n) \text{ konvergiert.}$$