

6 Komplexe Zahlen und Funktionen¹

6.1 Komplexe Zahlen

6.1.1 Einführung

Seien $x, y \in \mathbb{R}$. Dann ist $z = x + iy$ eine komplexe Zahl. Auf den komplexen Zahlen werden eine Addition

$$(x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$$

und eine Multiplikation

$$(x_1 + iy_1) \cdot (x_2 + iy_2) = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1)$$

definiert.

$$\mathbb{C} := \{x + iy : x, y \in \mathbb{R}\}$$

bildet mit dieser Addition und Multiplikation einen Körper. $\mathbb{R}^* = \{x + i \cdot 0 : x \in \mathbb{R}\}$ wird identifiziert mit $\mathbb{R}$. Die Abbildung

$$\begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow \mathbb{R}^* \\ x & \mapsto x + i \cdot 0 \end{cases}$$

ist bijektiv. Diese Abbildung ist ein Isomorphismus für $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^*$ und ein Holomorphismus für $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$. Es gilt:

$$\mathbb{R} = \{x + i \cdot 0 : x \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{C}.$$

6.1.2 Bezeichnungen

Sei $z = x + i \cdot y$. Dann heißt $\operatorname{Re} z = x$ *Realteil* und $\operatorname{Im} z = y$ *Imaginärteil* von z . $\bar{z} = x - iy$ ist die konjugiert komplexe Zahl zu z . Es gilt dabei $\bar{\bar{z}} = z$ und

$$\operatorname{Re} z = \frac{1}{2}(z + \bar{z}) \text{ bzw. } \operatorname{Im} z = \frac{1}{2i}(z - \bar{z}).$$

Bei Addition und Multiplikation ist

$$\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w} \text{ bzw. } \overline{z \cdot w} = \bar{z} \cdot \bar{w}.$$

Für $z \neq 0$ ist

$$\frac{1}{z} = z^{-1} = \frac{1 \cdot \bar{z}}{z \cdot \bar{z}} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2},$$

insbesondere ist

$$\frac{1}{i} = \frac{\bar{i}}{1} = -i.$$

Bei der Division gilt für $w \neq 0$:

$$\overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{w}}.$$

¹Version 184 vom 13. Februar 2006

$$|z| := \sqrt{z \cdot \bar{z}} = \sqrt{x^2 + y^2}$$

heißt *Betrag* von z (Abstand zwischen z und 0. Für reelles $z = x$ ist $|z| = \sqrt{x^2} = |x|$ der reelle Betrag. Für den Betrag gilt:

$$|z \cdot w| = |z| \cdot |w| \text{ und } |i| = 1$$

Es ist

$$|-z| = |z| = |i \cdot z| = |\bar{z}|, |\operatorname{Re} z| \leq |z| \text{ und } |\operatorname{Im} z| \leq |z|.$$

6.1.3 Dreiecksungleichung

Für $z, w \in \mathbb{C}$ gilt die Dreiecksungleichung (vgl. 1.4.2 auf Seite 9):

$$|z + w| \leq |z| + |w|.$$

Gleichheit genau dann, wenn $z = 0$ oder $w = 0$ oder $w = \lambda z$ mit $\lambda > 0$. Auch die umgekehrte Dreiecksungleichung gilt:

$$||z| - |w|| \leq |z - w|$$

Beweis: Zuerst für die Dreiecksungleichung. Es ist

$$\begin{aligned} |z + w|^2 &= (z + w)(\overline{z + w}) = (z + w) \cdot (\bar{z} + \bar{w}) \\ &= z\bar{z} + z\bar{w} + w\bar{z} + w\bar{w} = |z|^2 + z\bar{w} + \overline{z\bar{w}} + |w|^2 \\ &= |z|^2 + 2\operatorname{Re}(z\bar{w}) + |w|^2 \\ &\leq |z|^2 + 2|z\bar{w}| + |w|^2 \\ &= |z|^2 + 2 \cdot |z| \cdot |w| + |w|^2 = (|z| + |w|)^2 \end{aligned}$$

Also ist $|z + w| \leq |z| + |w|$. Nun die umgekehrte Dreiecksungleichung:

Es ist $|z| = |(z - w) + w| \leq |z - w| + |w|$, also $|z| - |w| \leq |z - w|$. Genauso wird $|w| - |z| \leq |w - z|$ gezeigt. Zusammen ist dann $||w| - |z|| \leq |w - z|$.

Jetzt der Beweis für die Gleichheitskriterien:

1. Für $z = 0$ oder $w = 0$ klar.
2. Seien nun $z, w \neq 0$: Es ist dann

$$\begin{aligned} „ = “ &\iff \operatorname{Re}(z\bar{w}) = |z| \cdot |w| = |z\bar{w}| \\ &\iff z\bar{w} \in \mathbb{R} > 0 \iff \frac{z\bar{w}}{w\bar{w}} > 0 \\ &\iff \frac{z}{w} > 0 \iff \frac{z}{w} = \frac{1}{\lambda} \text{ mit } \lambda > 0 \\ &\iff w = \lambda z \text{ mit } \lambda > 0 \end{aligned}$$

6.2 Folgen und Reihen

6.2.1 Definition: Komplexe Folge

Eine Abbildung $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$, $n \mapsto c_n$ heißt (*komplexe*) *Folge*: (c_n) . (c_n) heißt konvergent gegen $c \in \mathbb{C}$, wenn $\lim_{n \rightarrow \infty} |c_n - c| = 0$ ist. Schreibweise: $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = c$ oder $c_n \rightarrow c$ für $n \rightarrow \infty$. Vergleiche auch 2.1.1 auf Seite 19.

Bemerkung: Sei $c_n = a_n + ib_n$ und $c = a + ib$ mit $a_n, b_n, a, b \in \mathbb{R}$. Es ist

$$\begin{aligned}|a_n - a| &\leq |c_n - c| \leq |a_n - a| + |b_n - b| \\ |b_n - b| &\leq |c_n - c| \leq |a_n - a| + |b_n - b|\end{aligned}$$

Es gilt also: $c_n \rightarrow c \iff a_n \rightarrow a, b_n \rightarrow b$.

6.2.2 Beispiel

$$\begin{aligned}c_n &= \frac{n+i}{1-2ni} = \frac{n+i}{1-2ni} \cdot \frac{1+2ni}{1+2ni} \\ &= \frac{n-2n+i(1+2n^2)}{1+4n^2} = \frac{-n}{1+4n^2} + i \frac{2n^2}{1+4n^2} \rightarrow \frac{i}{2} \\ c_n &= \frac{1+\frac{i}{n}}{\frac{1}{n}-2i} \xrightarrow{\text{Regeln}} \frac{1}{-2i} = \frac{i}{2}\end{aligned}$$

6.2.3 Vererbung der Grenzwertregeln

Alle Regeln für Grenzwerte von reellen Folgen gelten für komplexe Folgen weiter. Ausgeschlossen sind diejenigen, die auf der Anordnung der reellen Zahlen beruhen (Es gibt keine Anordnung unter den komplexen Zahlen).

Beispiel: Gelte $c_n \rightarrow c, d_n \rightarrow d$. Dann ist

$$|(c_n + d_n) - (c + d)| = |c_n - c + d_n - d| \leq |c_n - c| + |d_n - d| \rightarrow 0.$$

6.2.4 Definition: Komplexe Reihe

Sei (c_n) eine komplexe Folge und $\sum_{k=0}^n c_k$. Die unendliche Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} c_k$ heißt konvergent, wenn die Folge (s_n) konvergiert. Es ist $\sum_{k=0}^{\infty} c_k := \lim_{n \rightarrow \infty} s_n$.

Bemerkung: Sei $c_n = a_n + ib_n$ mit $a_n, b_n \in \mathbb{R}$. Dann ist $s_n = \sum_{k=0}^n a_k + i \sum_{k=0}^n b_k$. Also ist $\sum c_n$ genau dann konvergent, wenn $\sum a_n$ und $\sum b_n$ konvergent sind. Es ist $\sum c_n = \sum a_n + i \sum b_n$.

6.2.5 Beispiel: Die geometrische Reihe

Was ist $\sum_{n=0}^{\infty} c^n$? Reeller Versuch: Sei $c^n = c_n = a_n + ib_n$ und $c = a + ib$:

$$\begin{aligned}c_1 &= a + ib \\ c_2 &= (a + ib)^2 = a^2 - b^2 + 2iab \\ c_3 &= (a + ib)^3 = a^3 + 3ia^2b - 3ab^2 - ib^3 = a^3 - 3ab^2 + i(3a^2b - b^3)\end{aligned}$$

Nun ein komplexer Versuch: Es ist

$$s_n = 1 + c + \cdots + c^n = 1 + c(s_n - c^n).$$

Für $c = 1$ ist $s_n = n + 1$. Für $c \neq 1$ ist

$$s_n = \frac{1 - c^{n+1}}{1 - c} \rightarrow \frac{1}{1 - c} \text{ falls } |c| < 1.$$

Für $|c| \geq 1$ ist die Reihe divergent (selber machen).

6.2.6 Cauchy Kriterium

Eine komplexe Folge (c_n) bzw. Reihe $\sum_n c_n$ ist genau dann konvergent, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein n_0 gibt mit $|c_n - c_m| < \varepsilon$ bzw. $\left| \sum_{k=m+1}^n c_k \right| < \varepsilon$ für $n > m \geq n_0$ (Vergleiche mit 2.3.4, Seite 26, und 2.4.6, Seite 31). Dies bedeutet, daß $\mathbb{C}$ vollständig ist.

Beweis: Aufgabe (Zerlegung in Re- und Im-Teil).

6.2.7 Satz von Bolzano-Weierstraß

Jede beschränkte (d. h. $|c_n| \leq K$ für alle n) Folge (c_n) besitzt eine konvergente Teilfolge (vergleiche mit 2.3.3 auf Seite 26).

Beweis: Sei $c_n = a_n + ib_n$ mit $|a_n|, |b_n| \leq |c_n| \leq K$. Dann besitzt (a_n) eine konvergente Teilfolge (a_{n_k}) und (b_{n_k}) besitzt eine konvergente Teilfolge $(b_{n_{k_j}})$. Zusammen konvergiert dann $c_{n_{k_j}} = a_{n_{k_j}} + ib_{n_{k_j}}$.

6.2.8 Dirichletkriterium

Sei (λ_n) eine reelle monotone Nullfolge und (c_n) eine komplexe Folge mit beschränkten Partialsummen $\left(\left| \sum_{k=0}^n c_k \right| \leq M \text{ für alle } n \in \mathbb{N} \right)$.

Dann konvergiert $\sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n c_n$ (siehe 2.4.9 auf Seite 32).

Beweis: Sei $c_n = a_n + ib_n$. Dann ist $\left| \sum_{k=0}^n a_k \right| \leq M$ und $\left| \sum_{k=0}^n b_k \right| \leq M$, also ist $\sum_k \lambda_k a_k + i \sum_k \lambda_k b_k$ konvergent.

6.2.9 Definition: Absolute Konvergenz

$\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ heißt absolut konvergent, wenn $\sum_{n=0}^{\infty} |c_n|$ konvergiert (s. 2.5.1, Seite 34).

Bemerkung: Es ist $|a_n| \leq |c_n|$, $|b_n| \leq |c_n|$ und $|c_n| \leq |a_n| + |b_n|$.
 $\sum c_n$ ist absolut konvergent $\iff \sum a_n$ und $\sum b_n$ sind absolut konvergent.

6.2.10 Regeln

- (1) Absolut konvergente Reihen sind konvergent (vgl. 2.5.2 auf Seite 34).
- (2) Absolut konvergente Reihen darf man beliebig umordnen, ohne an der Konvergenz oder am Reihenwert etwas zu ändern (siehe 2.6.4 auf Seite 39).
- (3) Cauchyprodukt: Sind $\sum a_n$ und $\sum b_n$ absolut konvergent ($a_n, b_n \in \mathbb{C}$), so gilt:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} b_n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}.$$

Dabei konvergiert die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} |c_n|$ absolut (vgl. 2.6.10, Seite 43).

- (4) Majorantenkriterium: Ist $|c_n| \leq \lambda_n$ für alle n und konvergiert $\sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n$, dann konvergiert $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ absolut (vgl. 2.5.3, Seite 34).
- (5) Wurzelkriterium: Ist $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|} < 1$, so konvergiert $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ absolut (vergleiche mit 2.5.4, Seite 34).
- (6) Quotientenkriterium: Sind alle $c_n \neq 0$ und ist

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right| < 1,$$

so konvergiert $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ absolut (vgl. 2.5.5, Seite 35).

6.2.11 Beispiele

- (1) $\sum_{n=0}^{\infty} c^n$ konvergiert absolut für $|c| < 1$.

Beweis mit Wurzelkriterium: $\sqrt[n]{|c_n|} = \sqrt[n]{|c|^n} = |c|$.

- (2) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ konvergiert absolut für alle $z \in \mathbb{C}$.

Dies ist für $z = 0$ klar.

Für $z \neq 0$: Quotientenkriterium

$$\left| \frac{\frac{z^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{z^n}{n!}} \right| = \frac{|z|}{n+1} \rightarrow 0 \text{ für } n \rightarrow \infty$$

- (3) Cauchyprodukt:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{w^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \underbrace{\sum_{k=0}^n \frac{n! z^k w^{n-k}}{k!(n-k)!}}_{=(z+w)^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z+w)^n}{n!}$$

6.3 Konvergenz und Stetigkeit

6.3.1 Definition: Stetigkeit

Sei $D \subseteq \mathbb{C}$, $f: D \rightarrow \mathbb{C}$. f heißt *stetig* in $z_0 \in D$, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt mit $|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$ für alle $z \in D$ mit $|z - z_0| < \delta$ (vgl. 3.2.1, Seite 48). Geometrische Deutung von $|z - z_0| < \delta$: Kreisscheibe um z_0 mit dem Radius δ .

Bemerkung: Sei $u(z) = \operatorname{Re} f(z)$ und $v(z) = \operatorname{Im} f(z)$ für $z \in D$. Es ist $u, v: D \rightarrow \mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$. Dann gilt:

$$f = u + iv \text{ ist stetig in } z_0 \iff u, v \text{ sind stetig in } z_0 \in D$$

6.3.2 Beispiel

Sei $f(z) = z^2$, $D = \mathbb{C}$ und $z_0 \in \mathbb{C}$. Es ist

$$|f(z) - f(z_0)| = |z^2 - z_0^2| = |(z - z_0)(z + z_0)|.$$

Sei nun $\varepsilon > 0$. Wähle dazu $0 < \delta < 1$ so, daß $\delta \cdot (2|z_0| + 1) < \varepsilon$ ist. Aus $|z - z_0| < \delta$ folgt dann

$$|z| < \delta + |z_0| < 1 + |z_0|.$$

Damit ist dann

$$|f(z) - f(z_0)| < \delta \cdot (|z| + |z_0|) < \delta \cdot (1 + 2|z_0|) < \varepsilon.$$

Bemerkung: Die Regeln für stetige Funktionen $D \rightarrow \mathbb{C}$ gelten wie für reelle Funktionen $I \rightarrow \mathbb{R}$.

6.3.3 Definition: Gleichmäßige Konvergenz

Sei $f_n: D \rightarrow \mathbb{C}$ für $n = 0, 1, 2, \dots$. Die Folge (f_n) bzw. die Reihe $\sum_n f_n$ heißt gleichmäßig konvergent in D gegen $f: D \rightarrow \mathbb{C}$, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ einen Index n_0 gibt mit

$$|f_n(z) - f(z)| < \varepsilon \text{ für } n \geq n_0 \text{ und } z \in D$$

bzw.

$$\left| \sum_{k=0}^n f_k(z) - f(z) \right| < \varepsilon \text{ für } n \geq n_0 \text{ und } z \in D$$

(vergleiche auch 3.3.1, Seite 52).

Bemerkung: Sei $f_n = u_n + iv_n$ und $f = u + iv$. Dann gilt

$$f_n \rightarrow f \text{ gleichmäßig in } D \iff u_n \rightarrow u \text{ und } v_n \rightarrow v \text{ gleichmäßig in } D.$$

6.3.4 Satz

Konvergieren die f_n gleichmäßig gegen f in D , und sind alle f_n stetig in $z_0 \in D$, dann ist auch f stetig in D (siehe auch 3.3.4, Seite 53).

Beweis: Wie in $\mathbb{R}$.

6.3.5 Definition: Potenzreihe

Eine Reihe der Form

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n \tag{6.1}$$

heißt *Potenzreihe* mit dem Mittelpunkt (Entwicklungspunkt) z_0 . (c_n) heißt Koeffizientenfolge. Es sind $z_0, c_n \in \mathbb{C}$. Für den Konvergenzradius r gilt

$$r = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|}}.$$

(6.1) konvergiert für $|z - z_0| < r$ und divergiert für $|z - z_0| > r$. Sonderfälle sind:

(a) $r = 0$: Nur Konvergenz in z_0 , „nirgends“.

- (b) $r = \infty$: Überall konvergent.
 (c) $0 < r < \infty$: Für $|z - z_0| = r$ ist keine Aussage möglich.
 (d) Ist $r > 0$, so ist (6.1) gleichmäßig konvergent in $|z - z_0| < r$.
 Siehe auch 3.4.1 und 3.4.2 ab Seite 55.

Beweis: Wie in $\mathbb{R}$.

6.3.6 Die Exponentialfunktion

$$e^z := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

Die Exponentialfunktion ist definiert und stetig in $\mathbb{C}$. Für $z, w \in \mathbb{C}$ gilt die Funktionalgleichung $e^{z+w} = e^z \cdot e^w$. Außerdem ist $e^z \neq 0$ in $\mathbb{C}$, da für $w = -z$ gilt: $1 = e^z \cdot e^{-z}$ (siehe auch 3.5.1 und 3.5.2 ab Seite 62).

6.3.7 Eulersche Formel

Für $t \in \mathbb{R}$ gelten die Formeln:

$$\begin{aligned} e^{it} &= \cos t + i \sin t \\ e^z &= e^{x+iy} = e^x \cdot e^{iy} = e^x \cdot (\cos y + i \sin y) \end{aligned}$$

Beweis:

$$\begin{aligned} \cos t + i \sin t &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} t^{2n} + i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} t^{2n+1} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(it)^{2n}}{(2n)!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(it)^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(it)^n}{n!} = e^{it} \end{aligned}$$

6.3.8 Bemerkungen

$$e^{z+2\pi i} = e^z \cdot e^{2\pi i} = e^z \cdot (\cos 2\pi + i \sin 2\pi) = e^z \cdot (1 + 0) = e^z$$

Die Exponentialfunktion ist $2\pi i$ -periodisch. Es gilt

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

6.3.9 Additionstheoreme von Sinus und Cosinus

Seien $\varphi, \psi \in \mathbb{R}$. Es gilt

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi \text{ und } e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$$

und damit ist

$$\begin{aligned} e^{i\varphi} \cdot e^{i\theta} &= \cos \varphi \cos \theta - \sin \varphi \sin \theta + i(\cos \varphi \sin \theta + \sin \varphi \cos \theta) \\ e^{i\varphi} \cdot e^{i\theta} &= e^{i(\varphi+\theta)} = \cos(\varphi + \theta) + i \sin(\varphi + \theta) \end{aligned}$$

Es folgen dann die Additionstheoreme:

$$\begin{aligned} \cos \varphi \cos \theta - \sin \varphi \sin \theta &= \cos(\varphi + \theta) \\ \cos \varphi \sin \theta + \sin \varphi \cos \theta &= \sin(\varphi + \theta) \end{aligned}$$

6.3.10 Polarkoordinaten

Einführung: Es gilt:

$$\begin{aligned} |e^{it}|^2 &= |\cos t + i \sin t|^2 = \cos^2 t + \sin^2 t = 1 \\ \Rightarrow |e^{it}| &= 1 \text{ für } t \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Satz: Jedes $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ lässt sich schreiben als

$$z = |z| \cdot e^{i\theta} \text{ mit } \theta \in \mathbb{R}.$$

θ ist dabei eindeutig bestimmt, wenn man sich z. B. auf $0 \leq \theta < 2\pi$ oder $-\pi < \theta < \pi$ beschränkt. θ heißt auch *Argument* von z : $\theta = \arg z$.

Beweis: Sei $|z| = 1$, $z \neq -1, 1$. Schreibe $z = x + iy$, $x^2 + y^2 = 1$, $y \neq 0$. Es existieren genau zwei Stellen $\theta_1 \in (0, \pi)$ und $\theta_2 \in (\pi, 2\pi)$ mit

$$\theta_2 = 2\pi - \theta_1, \quad \sin \theta_1 = -\sin \theta_2.$$

Es gilt:

$$|y| = \sqrt{1 - x^2} = \sqrt{1 - \cos^2 \theta_j} = |\sin \theta_j|$$

Setze nun $\theta = \theta_1$ für $y > 0$ und $\theta = \theta_2$ für $y < 0$. Es gilt dann $\cos \theta = x$, $\sin \theta = y$. Andere θ 's gibt es nicht.

Für $z = -1$ ($\theta = \pi$) und $z = 1$ ($\theta = 0$) ist θ eindeutig bestimmt.

Sei nun $|z| \neq 1$ und $z \neq 0$. Es ist $z = |z| \cdot \underbrace{\frac{z}{|z|}}_{|\dots|=1} = |z| \cdot e^{i\theta}$.

6.3.11 Potenzen

Für $z = |z| \cdot e^{i\theta}$ ist $z^2 = |z| \cdot |z| \cdot e^{i\theta} \cdot e^{i\theta} = |z|^2 e^{2i\theta}$ und $z^n = |z|^n e^{in\theta}$.

Beweis: Per Induktion (selber machen).

6.3.12 Wurzeln

Problem: Sei $a = |a|e^{i\alpha}$ ($0 \leq \alpha < 2\pi$) gegeben und $z^n = a$. Gesucht ist z . Falls $a = 0$ ist $z = 0$. Sonst wird der Ansatz $z = r \cdot e^{i\theta}$ gemacht:

$$\begin{aligned} z^n = a &\iff r^n e^{in\theta} = |a|e^{i\alpha} \\ &\iff r^n = |a| \text{ und } n\theta = \alpha + 2k\pi \text{ für ein } k \in \mathbb{Z} \\ &\iff r = \sqrt[n]{|a|} \text{ und } \theta = \frac{\alpha + 2k\pi}{n} \end{aligned}$$

Es gilt nun

$$z_k = \sqrt[n]{|a|} \exp\left(i \frac{\alpha + 2k\pi}{n}\right) \Rightarrow z_k^n = a \text{ für ein } k \in \mathbb{Z}$$

und $z_{k+n} = z_k$ (dies ist selber zu beweisen).

Zusammenfassung: Sei $a \in \mathbb{C} \setminus 0$. Dann hat die Gleichung $z^n = a$ genau n verschiedene Lösungen in $\mathbb{C}$, nämlich

$$\sqrt[n]{a} = z_k = \sqrt[n]{|a|} \exp\left(i \frac{\alpha + 2k\pi}{n}\right) \text{ für } k = 0, 1, \dots, n-1$$

Bemerkung: Es ist $\arg z_k = \frac{\alpha+2k\pi}{n}$ und $\arg z_{k+1} - \arg z_k = \frac{2\pi}{n}$. Die Wurzeln liegen also gleichmäßig auf dem Vollkreis verteilt.

6.3.13 Polynome

Das Polynom $z^n - a$ mit festem $a \in \mathbb{C}$ hat die n Nullstellen $z_0, \dots, z_{n-1}$ für $a \neq 0$, bzw. $0, \dots, 0$ für $a = 0$.

6.3.14 Fundamentalsatz der Algebra

Jedes Polynom $P(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n$ ($n \geq 1$, $a_n \neq 0$, $a_\nu \in \mathbb{C}$) besitzt (mindestens) eine Nullstelle $z_0 \in \mathbb{C}$ mit $P(z_0) = 0$.

Beweis: (nach Gauß) Sei $|z| = r \geq r_0$. Dann ist

$$\begin{aligned} |P(z)| &= |a_n z^n + (a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_0)| \geq |a_n| r^n - \sum_{\nu=0}^{n-1} |a_\nu| r^\nu \\ &= r^n \cdot \left(|a_n| - \sum_{\nu=0}^{n-1} |a_\nu| \frac{1}{r^{n-\nu}} \right) > |P(0)| \text{ für } r \geq r_0 \text{ (} r_0 \text{ hinreichend groß)} \end{aligned}$$

Das heißt, daß die Nullstelle immer betragsmäßig kleiner als ein r_0 sein muß. Außerdem ist $|P(z)| > |P(0)|$ für betragsmäßig hinreichend großes z .

Annahme: Es ist $P(z) \neq 0$ in $\mathbb{C}$. Setze

$$m = \inf\{|P(z)| : |z| < r_0\}$$

Es existieren dann z_k mit $|z_k| < r_0$ und $|P(z_k)| \rightarrow m$.

Nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß sei z_k OBdA konvergent gegen z_0 :

$$m \leftarrow |P(z_k)| \rightarrow |P(z_0)|$$

Es ist also $m = |P(z_0)|$ und aus der Stetigkeit folgt $m \leq |P(0)|$. Für großes $z \in \mathbb{C}$ ist dann also

$$|P(z)| \geq |P(0)| \geq |P(z_0)| \geq m$$

Jetzt ist noch $P(z_0) = 0$ zu zeigen.

Annahme: Es ist $P(z_0) \neq 0$. Setze dann

$$Q(z) = \frac{P(z_0 + z)}{P(z_0)}.$$

Es ist $|Q(z)| \geq |Q(0)| = 1$.

Sei nun $z = r e^{i\theta}$ mit $0 \leq \theta < 2\pi$ und $r > 0$.

Außerdem sei $Q(z) = 1 + b_s z^s + \dots + b_n z^n$ mit $b_s \neq 0$. Dann ist

$$1 \leq |Q(z)|^2 = \left| 1 + b_s r^s e^{is\theta} + \dots + b_n r^n e^{in\theta} \right|^2$$

(es ist $|a + b|^2 = |a|^2 + 2 \operatorname{Re}(\bar{a}b) + |b|^2$)

$$\begin{aligned} &= 1 + 2 \operatorname{Re}(b_s r^s e^{is\theta} + \dots) + \left| b_s r^s e^{is\theta} + \dots \right|^2 \\ &= 1 + 2 \cdot |b_s| \cdot r^s \cdot |b_s| \cos(s\theta + \beta_s) + \text{Terme von } r^t \text{ mit } t > s. \end{aligned}$$

Also ist

$$0 \leq 2|b_s|r^s \cos(s\theta + \beta_s) + \text{Terme von } r^t \text{ mit } t > s.$$

Dividiere jetzt durch r^s . Dann ist

$$0 \leq 2|b_s| \cos(s\theta + \beta_s) + \text{Terme von } r^{t-s} \text{ mit } t > s.$$

Für $r \rightarrow 0$ ist dann

$$0 \leq 2|b_s| \cos(s\theta + \beta_s) \text{ für } 0 \leq \theta < 2\pi$$

Also ist $\cos(s\theta + \beta_s) \geq 0$ für $0 \leq \theta \leq 2\pi$ und festes $s \in \mathbb{N}$. Wenn man nun $\theta = \frac{\pi - \beta_s}{s}$ setzt, dann ist aber $\cos(s\theta + \beta_s) = \cos \pi = -1$. Widerspruch!

6.3.15 Folgerungen

1. $P(z) = a_n z^n + \dots + a_0$ kann man schreiben als

$$P(z) = a_n(z - z_1) \cdot (z - z_2) \dots (z - z_n) = a_n(z - \zeta_1)^{r_1} \dots (z - \zeta_s)^{r_s}$$

mit $r_1 + \dots + r_s = n$ und paarweise verschiedenen ζ_i .

Beweis: Es gibt $z_1 \in \mathbb{C}$ mit $P(z_1) = 0$. Dann ist

$$\begin{aligned} P(z) &= P(z) - (z_1) = \sum_{j=1}^n a_j(z^j - z_1^j) = (z - z_1) \cdot \sum_{j=1}^n a_j(z^{j-1} + \dots + z_1^{j-1}) \\ &= (z - z_1) \cdot P_1(z) \end{aligned}$$

Folgere nun weiter mit Induktion nach n . Für $n = 1$ ist die Behauptung klar.

$n - 1 \mapsto n$: Es ist $P(z) = (z - z_1) \cdot P_1(z)$ und $\text{grad } P_1 = n - 1$.

$$\text{Dann ist } P_1(z) = a_n \underbrace{(z - z_2) \dots (z - z_n)}_{n-1 \text{ Stück}}.$$

Spezialfall: $P(z) = a_0 + a_1 z^1 + \dots + a_n z^n$ heißt reell, wenn $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ sind. Ist P reell und $P(z_0) = 0$ für $z_0 \notin \mathbb{R}$, dann gilt

$$P(\overline{z_0}) = \sum_{j=0}^n a_j \overline{z_0^j} = \sum_{j=0}^n \overline{a_j z_0^j} = \overline{\sum_{j=0}^n a_j z_0^j} = \overline{P(z_0)} = \overline{0} = 0.$$

Die zu z_0 konjugierte Zahl ist für reelles P also auch Nullstelle.

2. Ist $P(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n$ reell, so gilt

$$P(z) = a_n(z - \xi_1)^{r_1} \dots (z - \xi_k)^{r_k} (z^2 - 2c_1 z + b_1)^{s_1} \dots (z^2 - 2c_\ell z + b_\ell)^{s_\ell}$$

mit $(b_j - c_j^2) > 0$, $\xi_j \in \mathbb{R}$ und $c_j, b_j \in \mathbb{R}$.

Beweis: P hat die Nullstellen $\xi_1, \dots, \xi_k \in \mathbb{R}$, paarweise verschieden, und $\zeta_1, \overline{\zeta_1}, \dots, \zeta_\ell, \overline{\zeta_\ell}$, jeweils konjugiert komplex und paarweise verschieden:

$$\begin{aligned} P(z) &= a_n(z - \xi_1)^{r_1} \dots (z - \xi_k)^{r_k} \\ &\quad \cdot ((z - \zeta_1)(z - \overline{\zeta_1}))^{s_1} \dots ((z - \zeta_\ell)(z - \overline{\zeta_\ell}))^{s_\ell} \end{aligned}$$

Dabei gilt:

$$\begin{aligned} (z - \zeta_1)(z - \overline{\zeta_1}) &= z^2 - z\overline{\zeta_1} - z\zeta_1 + \zeta_1\overline{\zeta_1} = z^2 - 2\text{Re}(\zeta_1)z + |\zeta_1|^2 \\ b_1 - c_1^2 &= |\zeta_1|^2 - (\text{Re } \zeta_1)^2 = (\text{Im } \zeta_1)^2 > 0 \end{aligned}$$

6.3.16 Satz über die Partialbruchzerlegung

Sind P und Q reelle Polynome ohne gemeinsame Nullstellen mit $\text{grad}(P) < \text{grad}(Q)$ und

$$Q(x) = \prod_{j=1}^k (x - \xi_j)^{r_j} \prod_{j=1}^{\ell} (x^2 - 2c_j x + b_j)^{s_j}.$$

Dann gibt es eindeutig bestimmte Zahlen $\alpha_{\nu j}$, $\beta_{\nu j}$ und $\gamma_{\nu j}$ mit

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \sum_{j=1}^k \sum_{\nu=1}^{r_j-1} \frac{a_{\nu j}}{(x - \xi_j)^{r_j-\nu}} + \sum_{j=1}^{\ell} \sum_{\nu=1}^{s_j-1} \frac{\beta_{\nu j} x + \gamma_{\nu j}}{(x^2 - 2c_j x + b_j)^{s_j-\nu}}.$$

Beweis: (von Redheffer) In den nächsten Abschnitten.

6.3.17 Hilfssatz 1

Seien P , Q und R Polynome mit den Graden p , q und r , wobei $r < p + q$ ist. Außerdem haben P und Q keine gemeinsamen Nullstellen. Dann gibt es zwei eindeutig bestimmte Polynome A und B mit $\text{grad}(A) < q$, $\text{grad}(B) < p$ und $AP + BQ = R$.

Beweis: Die Koeffizienten von P , Q und R seien c_j , d_j und e_j ($c_j = 0$ für $j > p$, $d_j = 0$ für $j > q$ und $e_j = 0$ für $j > r$). Die gesuchten Polynome A und B haben die Koeffizienten a_j und b_j ($a_j = 0$ für $j \geq q$ und $b_j = 0$ für $j \geq p$).

$AP + BQ = R$ ist äquivalent zum linearen Gleichungssystem

$$\sum_{j=0}^k c_{k-j} a_j + \sum_{j=0}^k d_{k-j} b_j = e_k \quad (6.2)$$

für $k = 0, 1, 2, \dots, p + q - 1$. Dies sind $p + q$ lineare Gleichungen mit den $p + q$ Unbekannten a_j ($0 \leq j < q$) und b_j ($0 \leq j < p$). Ist es eindeutig lösbar?

LINA: Ein LGS $Ax = b$ ist eind. lösbar $\iff Ax = 0$ hat nur die Triviale Lösung $x = 0$.

Mache nun (6.2) homogen (setze $e_k = 0$ für alle k , d. h. $R = 0$). Hat nun $AP + BQ = 0$ nur die Lösung $A = B = 0$?

Sei A, B Lösung: Ist $Q(z_1) = 0$, dann ist $P(z_1) \neq 0$ und damit ist dann $A(z_1) = 0$. Da Q aber q Nullstellen und hat, A aber weniger als $q - 1$ Nullstellen hat, ergibt sich ein Widerspruch. Also muß $A = 0$ und damit auch $B = 0$ sein.

6.3.18 Hilfssatz 2

Seien $P, Q_1, \dots, Q_m$ Polynome, je zwei ohne gemeinsame Nullstellen, $Q = Q_1 \cdot Q_2 \dots Q_m$ und $\text{grad}(P) < \text{grad}(Q)$. Dann gibt es eindeutig bestimmte Polynome $P_1, \dots, P_m$ mit $\text{grad}(P_j) < \text{grad}(Q_j)$ und

$$\frac{P}{Q} = \sum_{j=1}^m \frac{P_j}{Q_j}.$$

Beweis: Mit Induktion nach m .

$m = 1$: ($Q = Q_1$):

$$\frac{P}{Q} = \frac{P_1}{Q_1} \Rightarrow P_1 = P$$

$m-1 \mapsto m$: Wende Hilfssatz 1 (6.3.17) an auf:

$$AQ_m + B(Q_1 \dots Q_{m-1}) = P.$$

Die Voraussetzungen für den Hilfssatz sind: Q_m und $Q_1 \dots Q_{m-1}$ haben keine gemeinsame Nullstelle (nach Voraussetzung schon gegeben). Es ist

$$\begin{aligned} \text{grad}(P) &< \text{grad}(Q_1 \dots Q_m) = \left(\sum_{j=1}^{m-1} \text{grad}(Q_j) \right) + \text{grad}(Q_m) \\ &= \text{grad}(Q_1 \dots Q_{m-1}) + \text{grad}(Q_m) \end{aligned}$$

Aus dem Hilfssatz 1 ergibt sich dann A mit $\text{grad}(A) < \text{grad}(Q_1 \dots Q_{m-1})$ und B mit $\text{grad}(B) < \text{grad}(Q_m)$. Setze $P_m := B$. Dann ist $\text{grad}(P_m) < \text{grad}(Q_m)$. Es gilt damit

$$P = AQ_m + P_m Q_1 \dots Q_{m-1}.$$

Nach Division durch Q ist dann

$$\frac{P}{Q} = \frac{A}{Q_1 \dots Q_{m-1}} + \frac{P_m}{Q_m} = \sum_{j=1}^{m-1} \underbrace{\frac{P_j}{Q_j}}_{\odot} + \underbrace{\frac{P_m}{Q_m}}_{\oplus} = \sum_{j=1}^m \frac{P_j}{Q_j}$$

Dabei ist $\odot$ nach Induktionsvoraussetzung und $\oplus$ nach Hilfssatz 1 eindeutig.

6.3.19 Beweis der Partialbruchzerlegung

Sei nun $Q = (H_1)^{r_1} \dots (H_k)^{r_k} \cdot (L_1)^{s_1} \dots (L_\ell)^{s_\ell}$ mit $H_j(x) = (x - \xi_j)$ und $L_j = x^2 - 2c_jx + b_j$. Dann ist $Q_j = (H_j)^{r_j}$ oder $(L_j)^{s_j}$. Mit Hilfssatz 2 gilt dann:

$$\frac{P}{Q} = \sum_{j=1}^k \frac{P_j(x)}{(x - \xi_j)^{r_j}} + \sum_{j=1}^{\ell} \frac{\tilde{P}_j(x)}{(x^2 - 2c_jx + b_j)^{s_j}}$$

Dabei ist $\text{grad}(P_j) < r_j$ und $P_j(x) = \sum_{\nu=0}^{r_j-1} a_{\nu j} (x - \xi_j)^\nu$:

$$\frac{P_j(x)}{(x - \xi_j)^{r_j}} = \sum_{\nu=0}^{r_j-1} \frac{a_{\nu j}}{(x - \xi_j)^{r_j-\nu}}$$

Damit ist der 1. Teil der Behauptung bewiesen.

Setze $\tilde{P}(x) = \tilde{P}_j(x)$ und $(x^2 - 2c_jx + b_j)^{s_j} = (x^2 - 2cx + b)^s$. Es ist $\text{grad}(\tilde{P}) < 2s$. Gilt nun

$$\tilde{P}(x) \stackrel{?}{=} \sum_{\nu=0}^{s-1} (\beta_\nu + \gamma_\nu x) / (x^2 - 2cx + b)^\nu$$

Dann wäre nämlich

$$\frac{\tilde{P}(x)}{(x^2 - 2cx + b)^s} = \sum_{\nu=0}^{s-1} \frac{\beta_\nu + \gamma_\nu x}{(x^2 - 2cx + b)^{s-\nu}}$$

Diese Frage ist Aufgabe für das konkrete Problem $\tilde{P}(x) = 2x + 2x^2 - x^3$ und $x^2 - 2cx + b = x^2 + 1$. Es ist

$$\frac{-x^3 - 2x^2 + 2x}{x^2 - 1} = (-x + 2) + \frac{3x - 2}{x^2 - 1}$$

Also ist $\tilde{P}(x) = (-x + 2)(x^2 + 1) + 3x - 2$.

6.4 Trigonometrische Reihen

6.4.1 Definition: Trigonometrische Reihe

Eine Reihe

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikt} \quad (6.3)$$

heißt *trigonometrische Reihe* ($c_k \in \mathbb{C}$, $t \in \mathbb{R}$). Sie heißt konvergent im Punkt $t \in \mathbb{R}$, wenn

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=-n}^n c_k e^{ikt} =: \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikt}$$

existiert.

6.4.2 Bemerkung

(6.3) heißt reell, wenn $c_{-k} = \overline{c_k}$ für $k = 0, \pm 1, \dots$. Dann ist nämlich

$$\begin{aligned} c_{-k} e^{-ikt} + c_k e^{ikt} &= \overline{c_k} e^{ikt} + c_k e^{ikt} = 2 \operatorname{Re}(c_k e^{ikt}) \\ \Rightarrow \sum_{k=-n}^n c_k e^{ikt} &= c_0 + \sum_{k=1}^n (c_k e^{ikt} + c_{-k} e^{-ikt}) \\ &= c_0 + 2 \sum_{k=1}^n \operatorname{Re}(c_k e^{ikt}) \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Wenn nun $c_k = \frac{1}{2}(a_k - ib_k)$ ist, folgt $\operatorname{Re}(c_k e^{ikt}) = \frac{1}{2}(a_k \cos kt + b_k \sin kt)$ und mit $c_{-k} = \overline{c_k}$ ist

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikt} = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kt + b_k \sin kt)$$

6.4.3 Beispiel

Sei $\alpha_k \in \mathbb{R}$, $\alpha_k \downarrow 0$. Dann konvergiert

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \sin kt &\text{ für alle } t \in \mathbb{R} \\ \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \cos kt &\text{ für alle } t \text{ ausgenommen möglicherweise } t = 0, \pm 2\pi, \pm 4\pi \end{aligned}$$

Beweis: Mit dem Dirichletkriterium ($0 < t < 2\pi$). Es ist

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=1}^n \frac{\sin kt}{\cos kt} \right| &\leq \left| \sum_{k=1}^n e^{ikt} \right| = \left| e^{it} \sum_{k=0}^{n-1} (e^{it})^k \right| \\ &= \left| \frac{1 - e^{int}}{1 - e^{it}} \right| \leq \frac{2}{|1 - e^{it}|} \end{aligned}$$

Die Partialsummen sind beschränkt, also liegt Konvergenz vor.

Die Sinusreihe ist konvergent für $t = 0$ und $\cos(k \cdot 0) = 1$, hier hängt die Konvergenz also von (α_k) ab.

6.4.4 Integration von $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$

Sei $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ und $f(t) = u(t) + iv(t)$. Wenn $u, v: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ integrierbar sind, so setzt man

$$\int_a^b f(t) dt := \int_a^b u(t) dt + i \int_a^b v(t) dt$$

6.4.5 Integrationsregeln

(a)

$$\int_a^b (f(t) + g(t)) dt = \int_a^b f(t) dt + \int_a^b g(t) dt$$

(b)

$$\int_a^b cf(t) dt = c \int_a^b f(t) dt \quad (c \in \mathbb{C})$$

(c)

$$\int_a^b \overline{f(t)} dt = \overline{\int_a^b f(t) dt}$$

(d)

$$\left| \int_a^b f(t) dt \right| \leq \int_a^b |f(t)| dt$$

Beweis: Setze $I = \int_a^b f(t) dt$. Die Behauptung ist für $I = 0$ klar.

Sei nun $I \neq 0$ mit $I = |I|e^{i\alpha}$ und $\alpha = \arg(I)$:

$$\begin{aligned} |I| &= \operatorname{Re}(e^{-i\alpha} I) = \operatorname{Re} \left(e^{-i\alpha} \int_a^b f(t) dt \right) \\ &= \operatorname{Re} \left(\int_a^b e^{-i\alpha} f(t) dt \right) = \int_a^b \underbrace{\operatorname{Re}(e^{-i\alpha} f(t))}_{\leq |e^{-i\alpha} f(t)| = |f(t)|} dt \end{aligned}$$

(e) f_n konvergiere in $[a, b]$ gleichmäßig gegen f für $n \rightarrow \infty$ und alle f_n seien integrierbar. Dann ist

$$\int_a^b f_n(t) dt \longrightarrow \int_a^b f(t) dt.$$

Beweis:

$$\int_a^b u_n(t) dt + i \int_a^b v_n(t) dt \rightarrow \int_a^b u(t) dt + i \int_a^b v(t) dt = \int_a^b f(t) dt$$

6.4.6 Beispiel

Sei $\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikt} = f(t)$ gleichmäßig konvergent. Dann ist

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{-imt} f(t) dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(k-m)t} dt.$$

Für $\ell \in \mathbb{Z}$ ist dabei

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\ell t} dt &= \begin{cases} 2\pi & \ell = 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \\ \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\ell t} dt &= \left. \frac{e^{i\ell t}}{i\ell} \right|_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{i\ell} (e^{i\pi\ell} - e^{-i\pi\ell}) = 0 \\ \int_{-\pi}^{\pi} e^{-imt} f(t) dt &= 2\pi c_m. \end{aligned}$$

Also ist

$$c_m = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-imt} f(t) dt.$$

6.5 Fourierreihen

Alle Funktionen in diesem Abschnitt sind vom Typ $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ und sind 2π -periodisch, d. h. $f(x + 2\pi) = f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Außerdem sei f integrierbar über $[-\pi, \pi]$, also über beliebige $[a, b]$.

6.5.1 Definition

$$\hat{f}_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-ikt} dt$$

heißt k -ter *Fourierkoeffizient* von f ($k \in \mathbb{Z}$). Die Reihe $\sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{f}_k e^{ikt}$ ist die von f erzeugte *Fourierreihe*:

$$f \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{f}_k e^{ikt} \quad (6.4)$$

6.5.2 Bemerkung

Es ist $\hat{f}_k = \overline{\hat{f}_{-k}}$, d. h. (6.4) ist reell, denn

$$\begin{aligned} \hat{f}_{-k} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{ikt} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \overline{f(t)} e^{ikt} dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \overline{f(t) e^{-ikt}} dt = \overline{\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-ikt} dt} = \overline{\hat{f}_k}. \end{aligned}$$

Setzt man $\hat{f}_k = \frac{1}{2}(a_k - ib_k)$, so ist

$$\begin{aligned} f &\sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kt + b_k \sin kt) \\ a_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos kt \, dt \text{ für } k = 0, 1, \dots \\ b_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin kt \, dt \text{ für } k = 0, 1, \dots \\ a_k &= 2 \operatorname{Re} \hat{f}_k = \frac{2}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \operatorname{Re}(e^{-ikt}) \, dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos kt \, dt \end{aligned}$$

6.5.3 Beispiel

Sei

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{in } (-\pi, 0] \\ 1 & \text{in } (0, \pi] \end{cases}$$

2π -periodisch fortgesetzt. Es ist $\hat{f}_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} e^{-ikt} \, dt$.

Für $k = 0$ ist

$$\hat{f}_0 = \frac{1}{2}$$

und für $k > 0$ ist

$$\hat{f}_k = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{e^{-ikt}}{-ik} \Big|_0^{\pi} = \frac{1}{2\pi k} \cdot \frac{1}{-i} (e^{-i\pi k} - 1) = \frac{i}{2k\pi} \cdot \begin{cases} 0 & k \text{ gerade} \\ -2 & k \text{ ungerade} \end{cases}$$

Damit ist $a_0 = 1$ und $a_k = 2 \operatorname{Re} \hat{f}_k = 0$.

Es ist $b_k = -2 \operatorname{Im} \hat{f}_k = \frac{-1 \cdot 2}{2k\pi} \cdot \begin{cases} 0 & k \text{ gerade} \\ -2 & k \text{ ungerade} \end{cases}$. Also ist

$$f \sim \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin(2m-1)t}{2m-1}$$

Die Reihe ist überall konvergent nach Dirichlet, insbesondere in $t = 0$ mit dem Wert $\frac{1}{2}$.

6.5.4 Satz

(a) Ist f gerade, so ist $b_k = 0$ und $a_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(t) \cos kt \, dt$.

(b) Ist f ungerade, so ist $a_k = 0$ und $b_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(t) \sin kt \, dt$

Beweis:

$$\begin{aligned}\hat{f}_k &= \frac{1}{2\pi} \left[\int_{-\pi}^0 f(s) e^{-iks} ds + \int_0^\pi f(t) e^{-ikt} dt \right] = \left| \begin{array}{l} \text{Subst. im 1. Integral} \\ s = -t \\ ds = -dt \end{array} \right| \\ &= \frac{1}{2\pi} \left[\int_0^\pi f(-t) e^{ikt} dt + \int_0^\pi f(t) e^{-ikt} dt \right] = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \left[f(t) e^{-ikt} \pm f(t) e^{ikt} \right] dt\end{aligned}$$

dabei gilt + für gerades f und $-$ für ungerades f

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi f(t) \left[e^{-ikt} \pm e^{ikt} \right] dt$$

Dabei ist $[\dots] = 2 \cos kt$ für gerades f und $= -i2 \sin kt$ für ungerades f

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi f(t) \cdot \begin{array}{l} \cos kt \\ -i \sin kt \end{array} dt$$

Wenn f gerade ist, ist also $\hat{f}_k = \frac{1}{2} a_k$ reell. Wenn f ungerade ist, ist also $\hat{f}_k = \frac{-i}{2} b_k$.

6.5.5 Beispiel

Sei $f(t) = |t|$ in $-\pi < t \leq \pi$, 2π -periodisch fortgesetzt. f ist gerade, also ist $b_k = 0$,

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi t dt = \pi$$

und für $k > 0$ ist

$$\begin{aligned}a_k &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi t \cos kt dt = \frac{2}{\pi} \cdot t \cdot \frac{\sin kt}{k} \Big|_0^\pi - \frac{2}{\pi} \int_0^\pi 1 \cdot \frac{\sin kt}{k} dt \\ &= \frac{2}{\pi k \cdot k} \cos kt \Big|_0^\pi = \frac{2}{\pi k^2} (\cos(k\pi) - 1).\end{aligned}$$

D. h. $a_0 = \pi$, $a_{2k} = 0$ und

$$a_{2k-1} = \frac{2 \cdot (-2)}{\pi(2k-1)^2} = \frac{-4}{\pi(2k-1)^2}.$$

$$f \sim \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos((2k-1)t)}{(2k-1)^2}$$

ist gleichmäßig konvergent nach dem Majorantenkriterium. Später wird gezeigt:

$$f(t) \stackrel{!}{=} \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos((2k-1)t)}{(2k-1)^2}$$

Für $t = 0$ gilt dann

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos 0}{(2k-1)^2} \\ &\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} = \frac{\pi^2}{8} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} &= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(2m)^2} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(2m-1)^2} \\ &= \frac{1}{4} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^2} + \frac{\pi^2}{8} \end{aligned}$$

Also ist

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{4}{3} \cdot \frac{\pi^2}{8} = \frac{\pi^2}{6}.$$

6.5.6 Besselsche Ungleichung

Es ist

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\hat{f}_k|^2 \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f(t))^2 dt$$

mit $|\hat{f}_k|^2 = \frac{1}{4}(a_k^2 + b_k^2)$ gilt:

$$\left(\frac{a_0}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f(t))^2 dt.$$

Insbesondere gilt: $\hat{f}_k \rightarrow 0$ für $|k| \rightarrow \infty$,
d. h. $a_k \rightarrow 0$ und $b_k \rightarrow 0$ für $k \rightarrow \infty$.

Beweis: Sei

$$T(x) = \sum_{k=-n}^n c_k e^{ikx}$$

ein trigonometrisches Polynom, $c_k \in \mathbb{C}$. Dann ist

$$\begin{aligned} |f(x) - T(x)|^2 &= (f(x))^2 - 2f(x) \operatorname{Re}(\overline{T(x)}) + |T(x)|^2 \\ &= (f(x))^2 - 2 \operatorname{Re} \left(\sum_{k=-n}^n f(x) \overline{c_k} e^{-ikx} \right) + \sum_{k,\ell=-n}^n c_k \overline{c_\ell} e^{i(k-\ell)x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - T(x)|^2 dx &= \int_{-\pi}^{\pi} (f(x))^2 dx \\
&\quad - 2 \operatorname{Re} \sum_{k=-n}^n \overline{c_k} \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx} dx}_{=2\pi \hat{f}_k} \\
&\quad + \sum_{k,\ell=-n}^n c_k \overline{c_\ell} \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(k-\ell)x} dx}_{=0 \ (\ell \neq k); =2\pi \ (\ell=k)} \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} (f(x))^2 dx - 2 \operatorname{Re} \sum_{k=-n}^n 2\pi \hat{f}_k \overline{c_k} \\
&\quad + 2\pi \sum_{k=-n}^n |c_k|^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
0 &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - T(x)|^2 dx \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f(x))^2 dx - \sum_{k=-n}^n |\hat{f}_k|^2 \\
&\quad + \sum_{k=-n}^n |\hat{f}_k|^2 - 2 \operatorname{Re} \sum_{k=-n}^n \hat{f}_k \overline{c_k} + \sum_{k=-n}^n |c_k|^2 \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f(x))^2 dx - \sum_{k=-n}^n |\hat{f}_k|^2 + \underbrace{\sum_{k=-n}^n |\hat{f}_k - c_k|^2}_{\geq 0 \ (\text{=0 für } c_k = \hat{f}_k \ \forall k)}
\end{aligned}$$

Also ist

$$\sum_{k=-n}^n |\hat{f}_k|^2 \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f(t))^2 dt$$

Nun Grenzübergang $n \rightarrow \infty$, dann ist die Behauptung beweisen.

Zusatz: Sei $s_n(x) = \sum_{k=-n}^n \hat{f}_k e^{ikx}$, dann ist

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - s_n(x)|^2 dx \leq \int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - T(x)|^2 dx.$$

6.5.7 Satz von Riemann-Lebesgue

Sei $g \in R([a, b])$. Dann gilt

$$\int_a^b g(t) \begin{Bmatrix} e^{ikt} \\ \sin kt \\ \cos kt \end{Bmatrix} dt \rightarrow 0 \text{ für } k \rightarrow \pm\infty.$$

Beweis: Für den Fall, daß $[a, b] \subseteq (-\pi, \pi]$:

Setze

$$f(t) = \begin{cases} g(t) & \text{in } [a, b] \\ 0 & \text{in } (-\pi, \pi] \setminus [a, b] \end{cases}$$

2π -periodisch fortgesetzt. Dann ist

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_a^b g(t) e^{-ikt} dt &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-ikt} dt \\ &= \hat{f}_k \rightarrow 0 \end{aligned}$$

6.5.8 Der Dirichletkern

Sei

$$f \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{f}_k e^{ikt}.$$

Dann gilt

$$s_n(x) = \sum_{k=-n}^n \hat{f}_k e^{ikx} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_n(x-t) f(t) dt.$$

Dabei ist D_n der *Dirichletkern* und ist bestimmt durch

$$D_n(x) = \frac{\sin((n + \frac{1}{2})x)}{\sin \frac{1}{2}x}$$

und

$$D_n(0) = 2n + 1 = \lim_{x \rightarrow 0} D_n(x).$$

Beweis: Es ist

$$s_n(x) = \sum_{k=-n}^n \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-ikt} e^{ikx} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{\left(\sum_{k=-n}^n e^{ik(x-t)} \right)}_{=D_n(x-t)} \cdot f(t) dt$$

$$\begin{aligned} D_n(x) &= \sum_{k=-n}^n e^{ikx} = e^{-inx} \sum_{k=-n}^n e^{i(k+n)x} \\ &= e^{-inx} \sum_{j=0}^{2n} e^{ijx} = e^{-inx} \cdot \frac{1 - e^{i(2n+1)x}}{1 - e^{ix}} \\ &= \frac{e^{-(n+\frac{1}{2})ix} (1 - e^{i(2n+1)x})}{e^{-\frac{ix}{2}} (1 - e^{ix})} \\ &= \frac{e^{-(n+\frac{1}{2})ix} - e^{i(n+\frac{1}{2})x}}{e^{-i\frac{x}{2}} - e^{i\frac{x}{2}}} = \frac{-2i \sin((n + \frac{1}{2})x)}{-2i \sin \frac{x}{2}} \end{aligned}$$

6.5.9 Riemannscher Lokalisationssatz

Es ist

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{f}_k e^{ikx} = s(x)$$

$$\iff \int_0^{\delta} D_n(t) [f(x+t) + f(x-t) - 2s(x)] dt \rightarrow 0 \text{ für } n \rightarrow \infty$$

für ein $\delta > 0$. Das bedeutet: f bestimmt alle

$$\hat{f}_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-ikt} dt.$$

Beweis:

$$\begin{aligned} s_n(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_n(x-t) f(t) dt = \left| \begin{array}{l} x-t=y \\ dt=-dy \end{array} \right| \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{x-\pi}^{x+\pi} \underbrace{D_n(y) f(x-y)}_{2\pi\text{-periodisch in } y} dy = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_n(y) f(x-y) dy \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^0 D_n(y) f(x-y) dy + \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} D_n(y) f(x-y) dy = \left| \begin{array}{l} \text{Im 1. Integral subst.:} \\ y = -u \\ dy = -du \end{array} \right| \\ &= -\frac{1}{2\pi} \int_{\pi}^0 \underbrace{D_n(-u)}_{\text{gerade}} f(x+u) du + \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} D_n(y) f(x-y) dy \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} D_n(y) [f(x+y) + f(x-y)] dy \end{aligned}$$

Einschub:

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} D_n(y) [f(x+y) + f(x-y)] dy ? \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} D_n(y) (1+1) dy \\ &\quad [\text{setze } f(t) \equiv 1 \text{ und } s_n(x) = 1] \end{aligned}$$

Es ist

$$\begin{aligned} s_n(x) - s(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} D_n(y) [f(x+y) + f(x-y) - 2s(x)] dy \\ &= \frac{1}{2\pi} \left[\int_0^{\delta} + \int_{\delta}^{\pi} \right]. \end{aligned}$$

Zeige nun noch

$$\int_{\delta}^{\pi} D_n(y) \underbrace{[f(x+y) + f(x-y) - 2s(x)]}_{=:g(y)} dy \rightarrow 0 \text{ für } n \rightarrow \infty$$

Dann ist der Beweis erledigt.

Betrachte nun $D_n(y) \cdot g(y)$:

$$D_n(y) \cdot g(y) = \sin \left(\left(n + \frac{1}{2} \right) y \right) \cdot \underbrace{\frac{g(y)}{\sin \frac{1}{2}y}}_{=:h(y)} \text{ in } \delta \leq y \leq \pi$$

ist integrierbar über $[\delta, \pi]$:

$$\begin{aligned} \int_{\delta}^{\pi} D_n(y) \cdot g(y) dy &= \int_{\delta}^{\pi} \left(\left(n + \frac{1}{2} \right) y \right) \cdot h(y) dy = \left| \frac{y = 2t}{dy = 2dt} \right| \\ &= 2 \int_{\delta/2}^{\pi/2} \sin((2n+1)t) \cdot h(2t) dt \rightarrow 0 \text{ für } n \rightarrow \infty \end{aligned}$$

nach dem Satz von Riemann-Lebesgue (siehe 6.5.7, Seite 145).

6.6 Konvergenz- und Approximationssätze

6.6.1 Satz

Sei $f \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{f}_k e^{ikx}$. Setzt man $g(t) = f(x+t) + f(x-t) - 2c$ bei festem x und konvergiert

$$\int_0^{\pi} \frac{|g(t)|}{t} dt,$$

dann gilt

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{f}_k e^{ikx} = c.$$

Beweis: Siehe 6.6.3.

6.6.2 Beispiele

1. Sei

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } -\pi < x < 0 \\ 1 & \text{für } 0 < x < \pi \\ \frac{1}{2} & \text{für } x = 0, \pi \end{cases},$$

2π -periodisch fortgesetzt. Es ist

$$f \sim \frac{1}{2} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(2k-1)t}{\pi(2k-1)}$$

Nach dem Satz ist überall Gleichheit, denn:

Für $x \neq 0, \pm\pi, \pm 2\pi, \dots$ ist $g(t) = 0$ in $[0, \delta]$.

Für $x = 0$ und $c = \frac{1}{2}$ ist $g(t) = 1 + 0 - 2\frac{1}{2} = 0$ in $(0, \delta)$.

2. Sei $f(x) = |x|$ in $-\pi < x \leq \pi$, 2π -periodisch fortgesetzt.
Für $0 < x < \pi$ ist

$$f(x+t) + f(x-t) - 2f(x) = x+t + x-t - 2x = 0 \text{ für } 0 \leq t \leq \delta.$$

Für $x = 0$ ist

$$f(t) + f(-t) - 2f(0) = |t| + |t| - 0 = 2|t| = 2f(t)$$

$$\int_0^\delta \frac{g(t)}{t} dt = \int_0^\delta 2 dt \checkmark$$

Also ist

$$\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(2k-1)t}{(2k-1)^2} = |t| \text{ in } -\pi \leq t \leq \pi.$$

6.6.3 Beweis von 6.6.1

Es ist

$$s_n(x) - c = \frac{1}{2\pi} \int_0^\delta D_n(t)g(t) + \varepsilon_n,$$

wobei $\varepsilon_n \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$ (nach dem Lokalisationssatz) für jedes $\delta > 0$.

Sei $\varepsilon > 0$. Dazu gibt es ein $\delta > 0$ mit

$$\int_0^\delta \frac{|g(t)|}{t} dt < \varepsilon.$$

Zu diesem δ existiert ein n_0 mit $|\varepsilon_n| < \varepsilon$ für $n \geq n_0$.

$$\begin{aligned} D_n(t) &= \sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)t\right) \cdot \underbrace{\left(\frac{1}{\sin \frac{t}{2}} - \frac{1}{\frac{t}{2}} + \frac{1}{\frac{t}{2}}\right)}_{=h(t)} \\ &= \sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)t\right) \cdot \left(\frac{2}{t} + h(t)\right) \end{aligned}$$

(Aufgabe: Zeige, daß $h(t)$ in $t = 0$ stetig ist.)

Nach dem Satz von Riemann-Lebesgue ist

$$\begin{aligned} \int_0^\delta D_n(t)g(t) dt &= 2 \int_0^\delta \sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)t\right) \frac{g(t)}{t} dt \\ &\quad + \underbrace{\int_0^\delta \sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)t\right) g(t)h(t) dt}_{\rightarrow 0 \text{ für } n \rightarrow \infty} \end{aligned}$$

Also ist das 2. Integral für $n \geq n_1$ betragsmäßig kleiner als ε . Zusammen gilt also:

$$|s_n(x) - c| \stackrel{\odot}{\leq} \frac{2}{2\pi} \int_0^\delta \left| \sin \left(\left(n + \frac{1}{2} \right) t \right) \right| \cdot \frac{|g(t)|}{t} dt + \varepsilon + \varepsilon$$

mit $n \geq \max(n_0, n_1)$ bei $\odot$.

6.6.4 Beispiele

1. Sei

$$h(t) = \begin{cases} a & \text{für } -\pi < t < t_0 \\ b & \text{für } t_0 < t < \pi \end{cases},$$

beliebig in $t = t_0$ und $t = \pi$ und 2π -periodisch fortgesetzt. Dann ist

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{h}_k e^{ikt} = \begin{cases} a & \text{für } -\pi < t < t_0 \\ b & \text{für } t_0 < t < \pi \\ \frac{a+b}{2} & \text{für } t_0 \text{ und } \pi \end{cases}$$

2. Sei

$$f \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{f}_k e^{ikt}$$

mit $\lim_{t \rightarrow t_0^-} f(t) = a$ und $\lim_{t \rightarrow t_0^+} f(t) = b$. Betrachte dann $g(t) = f(t) - h(t)$:

$$\sum \hat{f}_k e^{ikt} = \underbrace{\sum \hat{h}_k e^{ikt}}_{\frac{a+b}{2} \text{ in } t_0} + \sum \hat{g}_k e^{ikt}$$

g ist stetig in t_0 , wenn man $g(t_0) = 0$ setzt.

6.6.5 Satz

Ist f in t_0 Dini-Stetig, d. h. gilt $|f(t) - f(t_0)| \leq \omega(|t - t_0|)$ mit $\int_0^\pi \frac{\omega(h)}{h} dh < \infty$. Dann gilt:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{f}_k e^{ikt_0} = f(t_0).$$

Bemerkung: Beispiele für die Dini-Stetigkeit:

(a) Lipschitz-Stetigkeit: $|f(t) - f(t_0)| \leq L|t - t_0|$. Setze $\omega(h) = Lh$.

(b) Hölder-Stetigkeit: $|f(t) - f(t_0)| \leq L|t - t_0|^\alpha$ für ein $\alpha \in (0, 1)$.
Setze $\omega(h) = Lh^\alpha$ und

$$\int_0^\pi \frac{\omega(h)}{h} dh = L \int_0^\pi h^{\alpha-1} dh$$

existiert.

(c) Sei f differenzierbar in t_0 . Dann gilt (a).

6.6.6 Satz

Ist $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ Dini-stetig und 2π -periodisch, d. h. es ist $|f(x) - f(y)| \leq \omega(|x - y|)$ mit $\int_0^\pi \frac{\omega(h)}{h} dh < \infty$.

Dann ist für alle $x \in \mathbb{R}$

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{f}_k e^{ikx} = f(x).$$

6.6.7 Satz

Ist $f \in C^1(\mathbb{R})$, 2π -periodisch, dann konvergiert $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\hat{f}_k|$. Da $|\hat{f}_k e^{ikx}| = |\hat{f}_k|$ ist, konvergiert also

$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{f}_k e^{ikx}$ gleichmäßig gegen $f(x)$.

Beweis: Sei $k \neq 0$. Dann ist

$$\begin{aligned} \hat{f}_k &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-ikt} dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \left[\underbrace{f(t) e^{-ikt} \frac{1}{-ik}}_{=0} \Big|_{-\pi}^{\pi} + \int_{-\pi}^{\pi} f'(t) \frac{e^{-ikt}}{ik} dt \right] = \frac{1}{ik} c_k \end{aligned}$$

Dabei ist c_k der k -te Fourierkoeffizient von f' . Also ist $c_k = ik \hat{f}_k$.

$$f \sim \sum \hat{f}_k e^{ikx} \Rightarrow f' \sim \sum \left(\hat{f}_k e^{ikx} \right)'.$$

Nach der Besselschen Ungleichung gilt

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 < \infty.$$

Also ist

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} k^2 |\hat{f}_k|^2 < \infty.$$

Und damit gilt dann

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n |\hat{f}_k| &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \cdot k |\hat{f}_k| \\ &\stackrel{\text{CSU}}{\leq} \sqrt{\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}} \cdot \sqrt{\sum_{k=1}^n |c_k|^2} \\ &\leq \text{const.}, \text{ unabhängig von } n. \end{aligned}$$

6.6.8 Beispiel

Sei $f(t) = |\sin t|$. f ist gerade ($f(-t) = f(t)$) und Lipschitzstetig:

$$|f(x) - f(y)| = ||\sin x| - |\sin y|| \leq |\sin x - \sin y| = |x - y| \cdot |\cos \xi| \leq |x - y|.$$

Suche die a_k für die Fourierreihe

$$|\sin x| = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kx) \text{ für } x \in \mathbb{R}.$$

Es ist

$$\frac{a_0}{2} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin t \, dt = \frac{4}{\pi}$$

und für $k > 0$ ist

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin t \cdot \cos kt \, dt = \frac{2}{\pi} \left[\underbrace{\sin t \frac{\sin kt}{k}}_{=0} \Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} (\cos t) \frac{\sin kt}{k} \, dt \right] \\ &= -\frac{2}{k\pi} \left[\cos t \frac{-\cos kt}{k} \Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} (-\sin t) \frac{-\cos kt}{k} \, dt \right] \\ &= -\frac{2}{k^2\pi} \left[-1 \cdot (-\cos k\pi) + 1 - \int_0^{\pi} \sin t \cos kt \, dt \right] = -\frac{2}{k^2\pi} (1 + (-1)^k) + \frac{1}{k^2} a_k. \end{aligned}$$

Daraus folgt dann

$$\left(1 - \frac{1}{k^2}\right) a_k = \frac{-2}{k^2\pi} (1 + (-1)^k) = \begin{cases} 0 & \text{für ungerades } k \\ \frac{-4}{\pi k^2} & \text{für gerades } k \end{cases},$$

also

$$\begin{aligned} a_{2k} &= \frac{-4}{\pi(2k)^2(1 - \frac{1}{(2k)^2})} = \frac{-4}{\pi} \cdot \frac{1}{4k^2 - 1} \\ a_{2k+1} &= 0 \end{aligned}$$

und damit

$$|\sin x| = \frac{4}{\pi} \left(1 - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos 2kx}{4k^2 - 1} \right).$$

Für $x = 0$ gilt dabei

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4k^2 - 1} = 1.$$

6.6.9 Satz von Fejer

Ist $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und 2π -periodisch, so gilt

$$\sigma_n(x) \rightarrow f(x) \text{ für } n \rightarrow \infty$$

gleichmäßig auf $\mathbb{R}$. Dabei ist

$$\sigma_n(x) := \frac{s_0(x) + s_1(x) + \cdots + s_n(x)}{n+1}$$

das n -te *Fejer-Mittel*.

Beweis: Es ist

$$s_k(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_k(x-t) \cdot f(t) dt.$$

Damit ist

$$\sigma_n(x) = \frac{1}{n+1} \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\sum_{k=0}^n D_k(x-t) \right) \cdot f(t) dt.$$

Dabei wird

$$F_n(x-t) = \left(\sum_{k=0}^n D_k(x-t) \right) \cdot \frac{1}{n+1}$$

der *Fejer-Kern* genannt. Es gilt:

$$(n+1)F_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{\sin((k+\frac{1}{2})x)}{\sin \frac{1}{2}x}.$$

Für $z = \exp(\frac{ix}{2})$ ist

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n \sin\left(\left(k+\frac{1}{2}\right)x\right) &= \sum_{k=0}^n \operatorname{Im}(z^{2k+1}) = \operatorname{Im}\left(\sum_{k=0}^n z^{2k+1}\right) \\ &= \operatorname{Im}(z + z^3 + z^5 + \cdots + z^{2n+1}) = \operatorname{Im}(z(1 + z^2 + z^4 + \cdots + z^{2n})) \\ &= \operatorname{Im}\left(z \cdot \frac{1 - (z^2)^{n+1}}{1 - z^2}\right) = \operatorname{Im}\left(\frac{1 - z^{2n+2}}{\bar{z} \cdot z}\right) \\ &= \operatorname{Im}\left(\frac{1 - z^{2n+2}}{-2i \cdot \operatorname{Im} z}\right) = \operatorname{Im} \frac{i}{2} \cdot \frac{1 - z^{2n+2}}{\operatorname{Im} z} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{\operatorname{Re}(1 - z^{2n+2})}{\sin \frac{x}{2}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1 - \cos((n+1)x)}{\sin \frac{x}{2}} \end{aligned}$$

Also ist

$$F_n(x) = \frac{1}{2n+2} \cdot \frac{1 - \cos((n+1)x)}{(\sin \frac{x}{2})^2} \geq 0$$

und

$$|\sigma_n(x) - f(x)| = \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F_n(x-t) \cdot (f(t) - f(x)) dt \right| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F_n(x-t) \cdot |f(t) - f(x)| dt$$

Noch zu zeigen: Für $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$ mit

$$|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon \text{ für } |x_1 - x_2| < \delta$$

(gleichmäßige Stetigkeit).

$$\begin{aligned} |\sigma_n(x) - f(x)| &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F_n(x-t) \cdot |f(t) - f(x)| dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{x-\delta}^{x+\delta} F_n(x-t) \cdot |f(t) - f(x)| dt + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{x-\delta} + \frac{1}{2\pi} \int_{x+\delta}^{\pi} = I_1 + I_2 + I_3 \end{aligned}$$

Schätze nun die I_n ab:

$$\begin{aligned} I_1 &< \frac{\varepsilon}{2\pi} \int_{x-\delta}^{x+\delta} F_n(x-t) dt \leq \varepsilon \cdot \underbrace{\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F_n(x-t) dt}_{=1} \\ &= \varepsilon \text{ unabhängig von } x \text{ und } n \\ I_2 &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{x-\delta} F_n(x-t) \cdot 2M dt, \end{aligned}$$

da $|f(t)| \leq M$ für alle t ist. Außerdem ist

$$F_n(x-t) \leq \frac{1}{2n+2} \cdot \frac{2}{\sin^2 \frac{\delta}{2}} < \varepsilon \text{ für } n \geq n_0.$$

Dabei ist $-\pi \leq t \leq x - \delta$, also $x - t \geq \delta$. Zusammen ist also $I_2 < \varepsilon$ für $n \geq n_0$. Mache nun die gleich Abschätzung für I_3 und für alle Integrale gilt zusammen:

$$|\sigma_n(x) - f(x)| \leq 3\varepsilon.$$

6.6.10 Approximationssatz von Weierstraß

Ist f stetig in $[a, b]$, so gibt es eine Polynomfolge (P_n) , die gleichmäßig auf $[a, b]$ gegen f konvergiert. Äquivalent hierzu ist, daß es zu $\varepsilon > 0$ ein Polynom P gibt mit $|f(x) - P(x)| < \varepsilon$ in $[a, b]$.

Beweis: Für das Intervall $[-1, 1]$.

Anderenfalls wird die Funktion $\tilde{f}(t) = f(a + \frac{b-a}{2}(t+1))$ betrachtet. Dann ergibt sich ein Polynom $\tilde{P}$ mit $|\tilde{f}(t) - \tilde{P}(t)| < \varepsilon$ in $[-1, 1]$ und für das Polynom $P(x) = \tilde{P}(-1 + 2\frac{x-a}{b-a})$ ist dann $|P(x) - f(x)| < \varepsilon$ für $a \leq x \leq b$.

Nun der Beweis: $f(\cos t) = g(t)$ ist stetig auf $\mathbb{R}$, gerade. Sei $\sigma_n(t)$ das n -te Fejer-Mittel für die Funktion g . Es ist $\sigma_n \rightarrow g$ gleichmäßig auf $\mathbb{R}$, d. h. zu $\varepsilon > 0$ gibt es ein n_0 mit $|\sigma_n(t) - f(\cos t)| < \varepsilon$ für $n \geq n_0$ und $t \in \mathbb{R}$. Da g gerade ist, folgt:

$$\sigma_n(t) = \sum_{k=0}^n \alpha_k \cdot \cos kt \text{ für } n \geq n_0 \text{ fest}$$

Frage: Gibt es ein Polynom P_n mit $\sigma_n(t) = P_n(\cos t)$?

Falls ja:

$$|P_n(\cos t) - f(\cos t)| < \varepsilon \text{ für } n \geq n_0 \text{ und } t \in \mathbb{R}$$

$$|P_n(x) - f(x)| < \varepsilon \text{ für } n \geq n_0 \text{ und } -1 \leq x \leq 1.$$

Die Existenz von dieses Polynoms wird im folgenden Satz bewiesen. Hier nun 2 Beispiele:

Für $n = 1$ ist $T_1(x) = x$.

Für $n = 2$ ist $\cos(2t) = \cos^2 t - \sin^2 t = 2 \cos^2 t - 1$, also ist $T_2(x) = 2x^2 - 1$.

6.6.11 Satz

Zu jedem $n \in \mathbb{N}$ gibt es ein Polynom T_n vom Grad n mit $\cos(nt) = T_n(\cos t)$. T_n heißt n -tes *Tschebyscheffpolynom*.

Beweis: Zeige mit Induktion:

$$\cos nt = T_n(\cos t)$$

und

$$\sin nt = U_n(\cos t) \sin t \text{ mit Polynom } U_n.$$

„ $n = 1$ “: $T_1(x)$ und $U_1(x) = 1$.

„ $n \mapsto n + 1$ “:

$$\begin{aligned} \cos((n+1)t) &= \cos(nt + t) = \cos(nt) \cos t - \sin(nt) \sin t \\ &= T_n(\cos t) \cos t - U_n(\cos t) (\sin t)^2 = T_n(\cos t) \cos t - U_n(\cos t) (1 - (\cos t)^2) \\ &= T_{n+1}(\cos t) \\ T_{n+1}(x) &= T_n(x) \cdot x - U_n(x) (1 - x^2) \\ \sin((n+1)t) &= \frac{-1}{n+1} (\cos(n+1)t)' = \frac{-1}{n+1} (T_{n+1}(\cos t))' \\ &= \frac{-1}{n+1} T_{n+1}'(\cos t) (-\sin t) = U_{n+1}(\cos t) \sin t \\ U_{n+1} &= \frac{1}{n+1} T_{n+1}'(x) \end{aligned}$$

