

# 7 Metrische Räume<sup>1</sup>

## 7.1 Der euklidische Raum

### 7.1.1 Definition von $\mathbb{R}^n$

$$\mathbb{R}^n = \underbrace{\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}}_{n\text{-mal}}$$

Für  $x \in \mathbb{R}^n$  wird  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  geschrieben. Dies ist ein  $n$ -Tupel. Dabei ist  $x_\nu$  die  $\nu$ -te Komponente oder Koordinate von  $x$ .

Im  $\mathbb{R}^2$  wird allgemein das Paar  $(x, y)$  statt  $(x_1, x_2)$  benutzt.

Im  $\mathbb{R}^3$  wird allgemein das Tripel  $(x, y, z)$  statt  $(x_1, x_2, x_3)$  benutzt.

Der  $\mathbb{R}^n$  ist ein Vektorraum (linearer Raum) über  $\mathbb{R}$  mit

$$\begin{aligned}x + y &:= (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n) \\ \lambda x &:= (\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_n) \text{ mit } \lambda \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

Es ist  $\dim \mathbb{R}^n = n$ . Die Standardbasis ist

$$e^\nu := (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0) \text{ mit } \nu = 1, \dots, n$$

$$x = (x_1, \dots, x_n) = x_1 e^1 + x_2 e^2 + \cdots + x_n e^n$$

$$0 := (0, 0, \dots, 0)$$

### 7.1.2 Definition des Skalarproduktes und der euklidischen Norm

Für  $x, y \in \mathbb{R}^n$  heißt  $x \cdot y := x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n$  *Skalarprodukt* (Innenprodukt) zwischen  $x$  und  $y$ , und  $\|x\| := \sqrt{x \cdot x}$  heißt *euklidische Norm* von  $x$ . Ausführlich:

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{\nu=1}^n x_\nu^2}$$

### 7.1.3 Eigenschaften des Skalarproduktes

$$(S1) \quad x \cdot x > 0 \text{ für } x \neq 0.$$

$$(S2) \quad (\lambda x) \cdot y = \lambda(x \cdot y).$$

$$(S3) \quad (x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z.$$

$$(S4) \quad x \cdot y = y \cdot x.$$

---

<sup>1</sup>Version 184 vom 13. Februar 2006

### 7.1.4 Cauchy-Schwarz'sche Ungleichung

(Bunjakowskij)

$$|x \cdot y| \leq \|x\| \|y\|$$

und „=“ genau dann, wenn  $x$  und  $y$  linear abhängig sind. Anders geschrieben:

$$\left| \sum_{\nu=1}^n x_{\nu} y_{\nu} \right|^2 \leq \left( \sum_{\nu=1}^n x_{\nu}^2 \right) \cdot \left( \sum_{\nu=1}^n y_{\nu}^2 \right)$$

**Beweis:** Trivial für  $x = 0$  oder  $y = 0$ .

**Zunächst** für  $\|x\| = \|y\| = 1$ : Für  $t \in \mathbb{R}$  gilt

$$\begin{aligned} 0 &\leq \|x + ty\|^2 \\ &= (x + ty) \cdot (x + ty) \\ &= \|x\|^2 + 2t(x \cdot y) + t^2\|y\|^2 \\ &= 1 + 2t(x \cdot y) + t^2 \\ &= (t + (x \cdot y))^2 + 1 - (x \cdot y)^2 \end{aligned}$$

Setze nun  $t = t_0 := -x \cdot y$ . Dann ist

$$\begin{aligned} 0 &\leq 1 - (x \cdot y)^2 \\ \iff (x \cdot y)^2 &\leq 1 = \|x\| \cdot \|y\| \end{aligned}$$

„=“ genau dann, wenn  $x + t_0 y = 0$  ist, d. h. wenn  $x$  und  $y$  linear abhängig sind.

**Allgemeiner Fall:** Setze

$$\frac{x}{\|x\|} = \xi \text{ und } \frac{y}{\|y\|} = \eta \Rightarrow \|\xi\| = \|\eta\| = 1$$

$$\begin{aligned} |x \cdot y| &= |(\|x\|\xi) \cdot (\|y\|\eta)| = \|x\| \|y\| \underbrace{\xi \cdot \eta}_{\leq 1} \\ &\leq \|x\| \|y\| \end{aligned}$$

„=“ genau dann, wenn  $\xi$  und  $\eta$ , d. h.  $x$  und  $y$  linear abhängig sind.

Beachte: Für den Beweis wurden nur die Regeln (S1)-(S4) gebraucht!

### 7.1.5 Eigenschaften der Euklidnorm

(N1)  $\|x\| > 0$  für  $x \neq 0$  (Definitheit).

(N2)  $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$  für  $\lambda \in \mathbb{R}$  (Homogenität).

(N3)  $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$  (Dreiecksregel).

(N4)  $|\|x\| - \|y\|| \leq \|x + y\|$  (Umgekehrte Dreiecksungleichung) (folgt aus (N3)).

**Beweis:**

(N3)

$$\begin{aligned}
\|x + y\|^2 &= (x + y) \cdot (x + y) = x \cdot x + 2x \cdot y + y \cdot y \\
&\stackrel{(1)}{\leq} \|x\|^2 + 2|x \cdot y| + \|y\|^2 \\
&\stackrel{\text{CSU}}{\leq} \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2 \\
&= (\|x\| + \|y\|)^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{„} = \text{“} &\iff \text{„} = \text{“ bei (1) und CSU} \\
&\iff x \cdot y \geq 0 \text{ und } x, y \text{ linear abhängig} \\
&\iff x = 0 \text{ oder } y = 0 \text{ oder } y = \lambda x \text{ mit } \lambda \geq 0
\end{aligned}$$

(N4) Es ist  $x = x + y - y$ . Damit ist

$$\|x\| = \|(x + y) - y\| \stackrel{(\text{N3})}{\leq} \|x + y\| + \|-y\| = \|x + y\| + \|y\|$$

Damit ist  $\|x\| - \|y\| \leq \|x + y\|$ . Genauso wird  $\|y\| - \|x\| \leq \|x + y\|$  gezeigt und damit folgt die Behauptung.

### 7.1.6 Satz des Pythagoras

Für  $x, y \in \mathbb{R}^n$  mit  $x \cdot y = 0$  ist

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$$

 $(x, y \text{ orthogonal, } x \perp y)$ .**Beweis:**

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \underbrace{2x \cdot y}_{=0} + \|y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2.$$

### 7.1.7 Definition: Norm, Normierter Raum

Sei  $E$  ein Vektorraum über  $\mathbb{R}$ . Eine Abbildung  $\|\cdot\|: E \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x \mapsto \|x\|$  heißt *Norm*, wenn sie die Eigenschaften (N1)-(N3) hat (Es gilt immer auch (N4)).  $E$ , oder genauer  $(E, \|\cdot\|)$  heißt dann *normierter Raum*.

### 7.1.8 Beispiele

(a) Nehme zu  $E = \mathbb{R}^n$  die Euklidnorm.(b) Nehme zu  $E = \mathbb{R}^n$  die Maximumsnorm  $\|x\|_\infty := \max_{\nu=1}^n |x_\nu|$ .**Beweis** für (N3): Für festes  $\nu = 1, \dots, n$  ist

$$|x_\nu + y_\nu| \leq |x_\nu| + |y_\nu| \leq \|x\|_\infty + \|y\|_\infty$$

Also ist insgesamt  $\|x + y\|_\infty \leq \|x\|_\infty + \|y\|_\infty$ .

- (c) Nehme zu  $E = \mathbb{R}^n$  die Summennorm  $\|x\|_1 := \sum_{\nu=1}^n |x_\nu|$ .

**Beweis** für (N3):

$$\sum_{\nu=1}^n \underbrace{|x_\nu + y_\nu|}_{\leq |x_\nu| + |y_\nu|} \leq \sum_{\nu=1}^n |x_\nu| + \sum_{\nu=1}^n |y_\nu|$$

- (d) Nehme zu  $E = C([a, b]) =$  Raum der stetigen Funktionen  $[a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  die Maximumsnorm  $\|f\|_\infty := \max\{|f(t)| : a \leq t \leq b\}$ .

**Beweis** für (N3): Für  $a \leq t \leq b$  ist

$$\begin{aligned} |f(t) + g(t)| &\leq |f(t)| + |g(t)| \\ &\leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty \\ \Rightarrow \|f + g\|_\infty &\leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty \end{aligned}$$

- (e) Nehme zu  $E = s = \{(a_n) : a_n \in \mathbb{R}, n \geq 1, (a_n) \text{ beschränkt}\}$  die Supremumsnorm  $\|(a_n)\|_\infty := \sup\{|a_n| : n \in \mathbb{N}\}$ .

**Beweis** für (N3): Für  $n = 1, 2, 3, \dots$  ist

$$|a_n + b_n| \leq |a_n| + |b_n| \leq \|(a_n)\|_\infty + \|(b_n)\|_\infty$$

Damit ist dann  $\|(a_n + b_n)\|_\infty \leq \|(a_n)\|_\infty + \|(b_n)\|_\infty$ .

### 7.1.9 Definition: Skalarprodukt

Sei  $E$  ein Vektorraum über  $\mathbb{R}$ . Eine Abbildung  $E \times E \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \rightarrow x \cdot y$ , mit den Eigenschaften (S1)-(S4) heißt *Skalarprodukt* auf  $E$  (Innenprodukt).

### 7.1.10 Satz

Ist  $x \cdot y$  ein Skalarprodukt auf  $E$ , so gilt die Cauchy-Schwarz'sche Ungleichung und  $\|x\| := \sqrt{x \cdot x}$  ist eine Norm.

### 7.1.11 Beispiele

1. Sei  $E = C([a, b])$  mit dem Innenprodukt

$$(f|g) := \int_a^b f(t)g(t) dt$$

Dann ist

$$\|f\|^2 := \int_a^b (f(t))^2 dt, \quad \|f\| = \sqrt{(f|f)} = \sqrt{\int_a^b (f(t))^2 dt}$$

Es gilt die Cauchy-Schwarz'sche Ungleichung:

$$\left( \int_a^b f(t)g(t) dt \right)^2 \leq \int_a^b (f(t))^2 dt \cdot \int_a^b (g(t))^2 dt.$$

Weise die Eigenschaft (S1) nach:  $(f|f) > 0$ , falls  $f$  nicht die Nullfunktion ist: Sei  $t_0 \in [a, b]$ , so daß  $f(t_0) \neq 0$  ist. Dann existiert ein  $\delta > 0$  mit  $|f(t)| > k > 0$  in  $I = [a, b] \cap (t_0 - \delta, t_0 + \delta)$  und damit ist

$$(f|f) = \int_a^b (f(t))^2 dt \geq k^2 \cdot \text{Länge von } I > 0.$$

2. Sei

$$E = \left\{ (a_n) : \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \text{ konvergiert} \right\}$$

Ist  $E$  ein linearer Raum? Zu zeigen ist, daß für  $(a_n), (b_n) \in E$  auch  $(a_n + b_n) \in E$  ist. Es ist  $(a_n + b_n)^2 = a_n^2 + 2a_nb_n + b_n^2$ . Dies konvergiert, wenn  $2a_nb_n$  konvergiert, da die anderen Terme nach Voraussetzung konvergent sind. Es ist

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^N |a_n| \cdot |b_n| &\stackrel{\text{CSU im } \mathbb{R}^n}{\leq} \sqrt{\sum_{n=1}^N |a_n|^2 \cdot \sum_{n=1}^N |b_n|^2} \\ &\leq \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2} \cdot \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2} =: C \end{aligned}$$

Also konvergiert  $\sum_{n=1}^{\infty} |a_nb_n|$ .

Das Skalarprodukt ist hier:

$$((a_n)|(b_n)) := \sum_{n=1}^{\infty} a_nb_n$$

**Aufgabe:** Beweise (S1)-(S4) mit Hilfe der Regeln für Reihen.

**Bemerkung:** Der Raum in diesem Beispiel wird  $\ell^2$  („L-zwei“) genannt und

$$\|a_n\| = \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2}$$

heißt  $\ell^2$ -Norm.

## 7.2 Topologische Grundbegriffe

### 7.2.1 Definition: Metrik, metrischer Raum

Sei  $M \neq \emptyset$  eine Menge. Eine Abbildung  $d: M \times M \rightarrow [0, \infty)$  mit den Eigenschaften

(M1)  $d(x, y) > 0$  für  $x \neq y$  und  $d(x, x) = 0$  (Definitheit)

(M2)  $d(x, y) = d(y, x)$  (Symmetrie)

(M3)  $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$  (Dreiecksungleichung)

heißt *Metrik*. Aus (M2) und (M3) folgt

(M4)  $|d(x, z) - d(z, y)| \leq d(x, y)$  (umgekehrte Dreiecksungleichung).

$M$  mit der Metrik  $d$  heißt *metrischer Raum*.

**Beweis:** Es ist  $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ , also ist  $d(x, z) - d(y, z) \leq d(x, y)$ . Zeige genauso, daß  $d(y, z) - d(x, z) \leq d(y, x) = d(x, y)$  ist. Zusammen ist dann  $|d(x, z) - d(y, z)| \leq d(x, y)$ .

### 7.2.2 Beispiele

(1)  $E$  sei normierter Raum mit der Norm  $\|\cdot\|$ . Dann ist  $d(x, y) := \|x - y\|$  eine Metrik, insbesondere

(2)  $\mathbb{R}^n$  mit Euklidmetrik:

$$d(x, y) := \sqrt{\sum_{\nu=1}^n (x_\nu - y_\nu)^2}$$

(3)  $\mathbb{R}^n$  mit Metrik von Manhattan:

$$d(x, y) = \sum_{\nu=1}^n |x_\nu - y_\nu| = \|x - y\|_1$$

(4) Metrik des französischen Eisenbahnsystems: Wenn man von einem Punkt zum anderen will, muß man entweder über  $P$  (Paris) fahren, oder beide Punkte liegen an der gleichen Eisenbahnstrecke nach Paris.

(5) Sei  $(E, \|\cdot\|)$  ein normierter Raum. Dann ist

$$d(x, y) = \frac{\|x - y\|}{1 + \|x - y\|}$$

ebenfalls eine Metrik, wobei  $d(x, y) < 1$  ist.

Beweise (M1)-(M3) als Aufgabe. Tip zu (M3):  $t \mapsto \frac{t}{1+t}$  ist monoton wachsend für  $0 \leq t < \infty$ .

(6)  $(M, d)$  sei metrischer Raum und  $N \subseteq M$ ,  $N \neq \emptyset$ . Dann ist  $(N, d)$  ein metrischer Raum ( $N$  erbt die Metrik von  $M$ ).

## A Offene Mengen

In diesem Abschnitt bedeuten immer  $M$  ein metrischer Raum,  $d$  eine Metrik,  $A, B, C, \dots \subseteq M$ ,  $x, y, a, \dots \in M$  und  $r, \varrho, \varepsilon, \delta, \dots > 0$ .

### 7.2.3 Definition: Offene Kugel

$K(a, r) = \{x \in M : d(x, a) < r\}$  heißt *offene Kugel um  $a$  mit Radius  $r > 0$* .

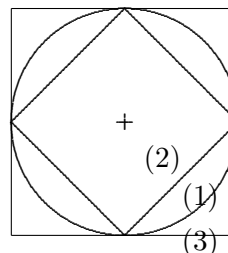
### 7.2.4 Beispiel

im  $\mathbb{R}^2$ :

(1) Euklid

(2) Manhattan  $d(x, y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|$

(3)  $d(x, y) = \max(|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|)$



Hier ist jedesmal die Kugel  $K((0,0),1)$  dargestellt.

### 7.2.5 Definition: Innerer Punkt, Inneres, offen

- (1)  $a \in A$  heißt *innerer Punkt* von  $A$ , wenn es eine Kugel  $K(a, r) \subseteq A$  gibt.
- (2)  $A^0 = \{x : x \text{ ist innerer Punkt von } A\}$  heißt *Inneres* oder *offener Kern* von  $A$ .
- (3)  $A$  heißt *offen*, wenn  $A$  nur aus inneren Punkten besteht.

### 7.2.6 Beispiel

Im  $\mathbb{R}^n$  mit der Euklidmetrik. Behauptung: Für  $a \in \mathbb{R}^n$  mit  $\|a\| = 1$  und  $\alpha \in \mathbb{R}$  ist

$$H = \{x \in \mathbb{R}^n : a \cdot x > \alpha\}$$

offen. Sei  $x \in H$ . Dann ist  $a \cdot x = \alpha + \delta > \alpha$ .

Behauptung:  $K(x, \delta) \subseteq H$ .

Sei  $\xi \in K(x, \delta)$ . D. h.  $\xi = x + \delta y$  mit  $\|y\| < 1$ . Ist  $\xi \in H$ ?

$$a \cdot \xi = \underbrace{a \cdot x}_{=\alpha+\delta} + \delta a \cdot y \stackrel{\text{CSU}}{\geq} \alpha + \delta - \delta \underbrace{\|a\|}_{=1} \underbrace{\|y\|}_{<1} > \alpha$$

Also ist  $\xi \in H$ ,  $K(x, \delta) \subseteq H$  und  $x$  ist innerer Punkt.

### 7.2.7 Satz

- (a)  $\emptyset$ ,  $M$ ,  $K(a, r)$ ,  $A^0$  sind offen.
- (b) Sind  $A_1, \dots, A_m$  offen, so ist  $A_1 \cap \dots \cap A_m$  offen.
- (c) Ist  $A_\lambda$  für  $\lambda \in \Lambda$  offen, so ist  $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$  offen.

**Beweis:**

- (a)  $\emptyset$ ,  $M$  offen ist klar.

**K(a, r):** Sei  $b \in K(a, r)$ . Dann ist  $\delta = r - d(a, b) > 0$ .

Zeige:  $K(b, \delta) \subseteq K(a, r)$ .

Sei  $x \in K(b, \delta)$ . Dann ist

$$d(x, a) \leq \underbrace{d(x, b)}_{<\delta} + \underbrace{d(b, a)}_{=r-\delta} < \delta + r - \delta = r,$$

also  $x \in K(a, r)$ .

**A<sup>0</sup>:** Sei  $a \in A^0$ . Dann ist  $a$  innerer Punkt von  $A$ , also existiert eine Kugel  $K(a, r) \subseteq A$ . Ist diese Kugel  $\subseteq A^0$ ?

Sei  $b \in K(a, r)$ . Dann ist  $b$  innerer Punkt von  $K(a, r)$ , d. h. es existiert ein  $\delta > 0$  mit  $K(b, \delta) \subseteq K(a, r) \subseteq A$ .

Für  $b \in A^0$  folgt also  $K(a, r) \subseteq A^0$ , d. h.  $(A^0)^0 = A^0$ .

- (b) Sei  $A_1 \cap \dots \cap A_m = A$ . Wenn  $a \in A$  ist, existieren  $r_j > 0$  mit  $K(a, r_j) \subseteq A_j$  für  $j = 1, \dots, m$ . Setze  $r := \min\{r_1, \dots, r_m\}$ . Dann ist

$$K(a, r) \subseteq K(a, r_j) \subseteq A_j \text{ für } j = 1, \dots, m,$$

also ist  $K(a, r) \subseteq A$ ,  $A$  ist offen.

- (c) Sei  $A = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$  und  $a \in A$ , also  $a \in A_j$  für ein  $\lambda$ . Dann existiert ein  $r > 0$  mit  $K(a, r) \subseteq A_\lambda \subseteq A$ .  $A$  ist offen.

**Achtung:** Sei  $A_j = \left\{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| < \frac{1}{j}\right\} = K\left(0, \frac{1}{j}\right)$  im  $\mathbb{R}^n$ .

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} A_j = \{0\} \text{ ist nicht offen}$$

### 7.2.8 Bemerkung

Jede Menge  $A$  mit  $K(a, r) \subseteq A$  für irgendein  $r > 0$  heißt *Umgebung* des Punktes  $a$ .

## B Folgen

In diesem Abschnitt ist  $M$  ein metrischer Raum,  $a \in M$  und  $a_n \in M$  für  $n = 1, 2, \dots$ .

### 7.2.9 Definition: Folge

Eine Abbildung  $\mathbb{N} \rightarrow M$ ,  $n \mapsto a_n$ , heißt *Folge*, und wird mit  $(a_n)$  bezeichnet.  $(a_n)$  heißt konvergent gegen  $A$ , wenn  $\lim_{n \rightarrow \infty} d(a_n, a) = 0$  ist. Schreibweise:  $a_n \rightarrow a$  für  $n \rightarrow \infty$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ . Zu jedem  $\varepsilon > 0$  gibt es ein  $n_0$  mit  $d(a_n, a) < \varepsilon$  für alle  $n \geq n_0$ .

### 7.2.10 Eigenschaften

- (a) Der Grenzwert ist eindeutig bestimmt.
- (b) Aus  $a_n \rightarrow a$  und  $b_n \rightarrow b$  folgt  $d(a_n, b_n) \rightarrow d(a, b)$ .
- (c) Aus  $a_n \rightarrow a$  folgt  $d(a, a_n) \leq \text{const.}$  für alle  $n$ . Konvergente Folgen sind auch beschränkt, d. h. es existiert eine Kugel, die alle  $a_n$  enthält.

**Beweis:**

- (a) Gelte  $a_n \rightarrow a$  und  $a_n \rightarrow b$ . Dann ist

$$0 \leq d(a, b) \leq \underbrace{d(a, a_n)}_{\rightarrow 0} + \underbrace{d(a_n, b)}_{\rightarrow 0} \rightarrow 0$$

Also ist  $d(a, b) = 0$ , d. h.  $a = b$ .

- (b)

$$\begin{aligned} |d(a_n, b_n) - d(a, b)| &= |d(a_n, b_n) - d(a_n, b) + d(a_n, b) - d(a, b)| \\ &\leq |d(a_n, b_n) - d(a_n, b)| + |d(a_n, b) - d(a, b)| \\ &\leq d(b_n, b) + d(a_n, a) \rightarrow 0 \end{aligned}$$

- (c) Sei  $\varepsilon = 1$ .

Dann ist  $d(a_n, a) < \varepsilon$  für  $n \geq n_0$  und  $d(a_n, a) \leq c$  für  $n = 1, 2, \dots, n_0 - 1$ . Setze  $e = \max(1, c)$ .

Dann ist  $a_n \in K(a, e)$  für alle  $n$ .

Gibt es auch ein  $r$ , so daß  $a_n \in K(b, r)$  für alle  $n$  ist?

$$d(a_n, b) \leq d(a_n, a) + d(a, b) \leq e + d(a, b) =: r$$

### 7.2.11 Beispiel

Nehme  $C([a, b])$  mit der Metrik  $d(f, g) := \|f - g\|_\infty = \max_{a \leq t \leq b} |f(t) - g(t)|$ . Dann sind äquivalent:

1.  $f_n \rightarrow f$  im Raum, d. h.  $d(f_n, f) \rightarrow 0$  für  $n \rightarrow \infty$ .
2.  $f_n(t) \rightarrow f(t)$  gleichmäßig in  $[a, b]$ .

**Beweis:**

„ $\Rightarrow$ “ Sei  $\varepsilon > 0$ . Dazu existiert ein  $n_0$ , so daß für  $n \geq n_0$  gilt:

$$|f_n(t) - f(t)| \leq \|f_n - f\|_\infty < \varepsilon.$$

Dies gilt für  $a \leq t \leq b$ , d. h. es liegt gleichmäßige Konvergenz vor.

„ $\Leftarrow$ “ Sei  $\varepsilon > 0$ . Dazu existiert ein  $n_0$ , so daß für  $n \geq n_0$  und alle  $t \in [a, b]$  gilt:

$$|f(t) - f_n(t)| < \varepsilon$$

Wegen der gleichmäßigen Konvergenz ist  $f \in C([a, b])$ , also ist

$$\|f_n - f\|_\infty = \max_{a \leq t \leq b} |f_n(t) - f(t)| < \varepsilon \text{ für } n \geq n_0.$$

### 7.2.12 Satz

Im  $\mathbb{R}^n$  (mit Euklidmetrik) sind äquivalent:

1. Die Folge  $(x^{(m)})$  konvergiert gegen  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ .
2. Die Folgen  $(x_\nu^{(m)})$  konvergieren für  $\nu = 1, \dots, n$  gegen  $x_\nu$ .

**Beweis:**

„ $\Rightarrow$ “: Gelte  $x^{(m)} \rightarrow x$  für  $m \rightarrow \infty$  mit  $x = (x_1, \dots, x_n)$ . Dann ist für  $1 \leq \nu \leq n$ :

$$|x_\nu^{(m)} - x_\nu| \leq \|x^{(m)} - x\| \rightarrow 0 \text{ für } m \rightarrow \infty,$$

d. h.  $x_\nu^{(m)} \rightarrow x_\nu$ .

„ $\Leftarrow$ “: Gelte  $x_\nu^{(m)} \rightarrow x_\nu$  für  $m \rightarrow \infty$  und sei  $x := (x_1, \dots, x_n)$ . Dann ist

$$\|x^{(m)} - x\| = \sqrt{\sum_{\nu=1}^n (x_\nu^{(m)} - x_\nu)^2} \stackrel{\text{CSU}}{\leq} \sum_{\nu=1}^n |x_\nu^{(m)} - x_\nu| \rightarrow 0 \text{ für } m \rightarrow \infty.$$

### 7.2.13 Regeln

Im  $\mathbb{R}^n$  gelten die folgenden Regeln:

- (1)  $x^{(m)} \rightarrow x, \lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow \lambda x^{(m)} \rightarrow \lambda x$ .
- (2)  $x^{(m)} \rightarrow x, y^{(m)} \rightarrow y \Rightarrow x^{(m)} + y^{(m)} \rightarrow x + y$ .
- (3)  $x^{(m)} \rightarrow x, y^{(m)} \rightarrow y \Rightarrow x^{(m)} \cdot y^{(m)} \rightarrow x \cdot y$ , insbesondere  $\|x^{(m)}\| \rightarrow \|x\|$ .

**Beweis:** Für (1) und (2): Aufgabe. Für (3) in der Globalübung vom 18. April 1994.

**Bemerkung:** (1) und (2) gelten in jedem normierten Raum, (3) gilt in jedem Vektorraum mit Skalarprodukt.

## C Abgeschlossene Mengen

In diesem Abschnitt ist  $(M, d)$  ein metrischer Raum,  $A, B, \dots \subseteq M$  und  $a_n, a \in M$ .

### 7.2.14 Definition: Rand, abgeschlossen, Häufungspkt., abgeschl. Hülle

- (1)  $A \subseteq M$  heißt *abgeschlossen*, wenn  $M \setminus A$  offen ist.
- (2)  $a \in M$  heißt *Häufungspunkt* von  $A \subseteq M$ , wenn es eine Folge  $(a_n)$  in  $A \setminus \{a\}$  mit  $a_n \rightarrow a$  gibt.
- (3)  $A'$  ist die *Menge aller Häufungspunkte* von  $A$ .
- (4)  $\bar{A} = A \cup A'$  ist die *abgeschlossene Hülle* von  $A$ .
- (5)  $\partial A = \bar{A} \setminus A^0$  ist der *Rand* von  $A$ , die Punkte von  $\partial A$  sind die *Randpunkte*.

### 7.2.15 Beispiel

Sei  $A = \{x: \|x\| \leq 1\}$  im  $\mathbb{R}^n$  mit Euklidmetrik.

- (1)  $A$  ist abgeschlossen, d. h.  $B = \mathbb{R}^n \setminus A$  ist offen.

Sei  $x \in B$ . Dann ist  $\|x\| = 1 + \delta$  mit  $\delta > 0$ .

Zeige  $K(x, \delta) \subseteq B$ : Sei  $y \in K(x, \delta)$ . Dann ist

$$\|y\| = \|y - x + x\| = \|y - x - (-x)\| \geq \|x\| - \|y - x\| > 1 + \delta - \delta = 1.$$

Also ist  $K(x, \delta) \subseteq B$ ,  $x$  ist innerer Punkt von  $B$ ,  $B$  ist offen und  $A$  abgeschlossen.

- (2) Es ist  $A' = A = \bar{A}$ .

**Beweis:** Sei  $a \in A$  mit  $a \neq 0$  und  $a^{(m)} = (1 - \frac{1}{m}) \cdot a \neq a$ .

Es ist  $a^{(m)} \rightarrow a$  und  $\|a^{(m)}\| = |1 - \frac{1}{m}| \cdot \|a\| < 1 \cdot \|a\| \leq 1$ , d. h.  $a^{(m)} \in A$ .

Also ist  $a$  Häufungspunkt von  $A$  und damit  $A \subseteq A'$ .

Jetzt ist noch  $A' \subseteq A$  zu zeigen:

Sei  $a \in A'$ . Dann gibt es eine Folge  $a^{(m)} \in A$  mit  $a^{(m)} \rightarrow a$  (bzw.  $a = \lim_{m \rightarrow \infty} a^{(m)}$ ) und es ist

$$\|a\| = \lim_{m \rightarrow \infty} \underbrace{\|a^{(m)}\|}_{\leq 1} \leq 1,$$

d. h.  $a \in A$ . Also ist  $A' = A$  und damit auch  $\bar{A} = A$ .

- (3) Es ist  $A^0 = \{x: \|x\| < 1\} = K(0, 1)$ .

**Beweis:**  $K(0, 1) \subseteq A^0$  ist klar, da  $K(0, 1) \subseteq A$  und  $K(0, 1)$  offen ist.

Sei umgekehrt  $x \in A^0$ . Dann existiert ein  $\delta > 0$  mit  $K(x, \delta) \subseteq A$ . Insbesondere ist  $\|x\| \leq 1$ .

Wenn  $\|x\| = 1$  ist, setze  $y = x(1 + \frac{\delta}{2})$  und es ist  $\|y - x\| = \frac{\delta}{2}\|x\| < \delta$ , d. h.  $y \in K(x, \delta)$ .

Es ist aber  $\|y\| = (1 + \frac{\delta}{2})\|x\| > 1$ , d. h.  $y \notin A$ . Widerspruch!

Somit ist  $A^0 = K(0, 1)$ . Also gilt  $\partial A = \{x: \|x\| = 1\}$ .

**7.2.16 Aufgabe**

Es ist bereits gezeigt, daß  $H = \{x: a \cdot x > \alpha\}$  für  $a \in \mathbb{R}^n$ ,  $\|a\| = 1$  und  $\alpha \in \mathbb{R}$  offen ist. Zeige:  $\bar{H} = \{x: a \cdot x \geq \alpha\}$  ist abgeschlossen. Bestimme die Häufungspunkte, das Innere und den Rand.

**7.2.17 Satz**

- (a)  $\emptyset$ ,  $M$ ,  $A'$ ,  $\bar{A}$  und  $\partial A$  sind abgeschlossen.
- (b)  $A$  abgeschlossen  $\iff A' \subseteq A \iff \partial A \subseteq A \iff A = \bar{A}$ .
- (c)  $a \in M$  ist Randpunkt von  $A \iff$  Es gibt Folgen  $(a_n)$  in  $A$  und  $b_n$  in  $M \setminus A$  mit  $a_n \rightarrow a$  und  $b_n \rightarrow a$ .
- (d) Sind  $A_1, \dots, A_m$  abgeschlossen, so ist auch  $A_1 \cup \dots \cup A_m$  abgeschlossen.
- (e) Sind  $A_\lambda$  für  $\lambda \in \Lambda$  abgeschlossen, so ist  $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$  abgeschlossen.

**Beweis:**

- (a)  $\emptyset$  und  $M$  klar.  
 Beweis für  $\bar{A}$ . Es ist  $\bar{A} = A \cup A'$ . Sei  $B = M \setminus \bar{A}$  und  $b \in B$ .  
 Es gilt:  $b \notin A$  und  $b \notin A'$ . Also existiert keine Folge  $(a_n)$  in  $A$  mit  $a_n \neq b$  und  $a_n \rightarrow b$ . Dann existiert auch keine Folge  $(a_n)$  in  $A$  mit  $a_n \rightarrow b$ ,  
 d. h. es existiert  $\varepsilon > 0$  mit  $K(b, \varepsilon) \cap A = \emptyset$  und  $K(b, \varepsilon) \cap A' = \emptyset$ .  
 Es ist also  $K(b, \varepsilon) \subseteq B$ , d. h.  $b \in B^0$ .  $B$  ist offen,  $\bar{A}$  ist geschlossen.
- (b) Zeige hier:  $A$  ist abgeschlossen  $\iff A = \bar{A}$   
 „ $\Leftarrow$ “:  $A = \bar{A}$ , also ist  $A$  abgeschlossen.  
 „ $\Rightarrow$ “: Zeige  $A = \bar{A}$ .  
 „ $\subseteq$ “: Es ist  $A \subseteq A \cup A' = \bar{A}$   
 „ $\supseteq$ “: Sei  $a \in \bar{A} = A \cup A'$ . Dann ist  $a \in A$  (o.k) oder  $a \in A'$ .  
 Sei also  $a \in A'$ , d. h. es existiert eine Folge  $(a_n)$  in  $A$  mit  $a_n \neq a$  und  $a_n \rightarrow a$ .  
 Wäre  $a \notin A$ , dann wäre  $a \in B = M \setminus A$ . Dabei ist  $B$  offen.  
 Somit gibt es  $\varepsilon > 0$  mit  $K(a, \varepsilon) \subseteq B$ .  
 Für  $n \geq n_0$  ist dann  $d(a_n, a) < \varepsilon$ , d. h.  $a_n \in K(a, \varepsilon) \subseteq B = M \setminus A$ . Dann wären die  $a_n \notin A$ . Widerspruch zu  $a_n \in A$ .  
 Also muß  $a \in A$  sein.
- (c) „ $\Rightarrow$ “: Sei  $a \in \partial A = \bar{A} \setminus A^0$ . Dann ist  $a \in A'$  oder  $a \in A$ .  
 Für  $a \in A'$  existiert eine Folge  $(a_n) \in A \setminus \{a\}$  mit  $a_n \rightarrow a$ .  
 Für  $a \in A \setminus A'$  Setze  $a_n = a$ .  
 Da  $a \notin A^0$ , folgt daß zu jedem  $\varepsilon > 0$ , z. B. zu  $\varepsilon = \frac{1}{n}$  existiert eine Folge  $b_n \notin A$ , aber  $d(a, b_n) < \frac{1}{n}$ .  
 „ $\Leftarrow$ “: Sei  $a_n \in A$  mit  $a_n \rightarrow a$  (1) und  $b_n \notin A$  mit  $b_n \rightarrow a$  (2).  
 Aus (1) folgt  $a \in A'$  oder  $a \in A$ , also  $a \in \bar{A}$ .  
 Aus (2) folgt  $a \notin A^0$ .  
 Zusammen gilt:  $a \in \bar{A} \setminus A^0 = \partial A$ .

(d) Nach deMorgan gilt:

$$M \setminus (A_1 \cup \dots \cup A_m) = \underbrace{(M \setminus A_1)}_{\text{offen}} \cap (M \setminus A_2) \cap \dots \cap (M \setminus A_m) \text{ ist offen.}$$

(e) Ebenso gilt:

$$M \setminus \left( \bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda \right) = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} \underbrace{M \setminus A_\lambda}_{\text{offen}} \text{ ist offen.}$$

## 7.3 Kompakte und vollständige Räume

### 7.3.1 Definition: Kompakt

Sei  $(M, d)$  ein metrischer Raum und  $A \subseteq M$ .  $A$  heißt *kompakt*, wenn jede Folge in  $A$  eine konvergente Teilfolge mit Grenzwert in  $A$  besitzt.

### 7.3.2 Satz

Kompakte Mengen sind abgeschlossen und beschränkt, d. h. zu  $a \in A$  existiert ein  $r > 0$  mit  $d(x, a) \leq r$  für alle  $x \in A$ .

**Beweis:** Sei  $a \in A'$ , d. h. es existiert eine Folge  $(a_n)$  in  $A$  mit  $a_n \rightarrow a$ . Nach Definition ist aber  $a \in A$  und damit  $A' \subseteq A$ .  $A$  ist abgeschlossen.

Zeigen noch:  $r := \sup\{d(x, a) : x \in A\} < \infty$ .

Es existiert eine Folge  $(x_n)$  in  $A$  mit  $d(x_n, a) \rightarrow r$ .

Es existiert eine konvergente Teilfolge  $(x_{n_k})$  mit  $x_{n_k} \rightarrow x \in A$ .

Damit ist  $r = \lim_{k \rightarrow \infty} d(x_{n_k}, a) = d(x, a) \in \mathbb{R}$ , d. h.  $r < \infty$ .

### 7.3.3 Beispiel

Sei  $M = C([a, b])$  mit  $d(u, v) := \sqrt{\int_a^b (u(t) - v(t))^2 dt} = \|u - v\|$  und  $A = \{u \in C([a, b]) : \|u\| \leq 1\}$ .

$A$  ist beschränkt. ✓

$A$  ist abgeschlossen: Sei  $u \in A'$ , d. h. es gibt eine Folge  $u_n \in A$  mit  $u_n \rightarrow u$ ,  $u$  stetig ( $u \in M$ ) und es ist

$$\|u\| = \sqrt{\int_a^b (u(t))^2 dt} = \lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{\|u_n\|}_{\leq 1} \leq 1,$$

d. h.  $u \in A$ . Also ist  $A$  abgeschlossen.

$A$  ist nicht kompakt (zeige dies hier für das Intervall  $[a, b] = [-\pi, \pi]$ ): Setze

$$u_n(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \sin nt.$$

Dann ist

$$\|u_n\|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2\pi} (\sin nt)^2 dt = 1$$

und

$$\|u_n - u_m\|^2 = 1 + 2 \underbrace{\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (\sin nt) \cdot (\sin mt) dt}_{=0 \text{ für } n \neq m} + 1 = 2$$

$$\|u_n - u_m\| = \sqrt{2}$$

keine konvergente Teilfolge  $u_{n_k}$  kann existieren, sonst

$$0 \leftarrow \|u_{n_k+q} - u_{n_k}\| = \sqrt{2} \text{ Widerspruch}$$

### 7.3.4 Satz von Bolzano-Weierstraß

- (a) Im  $\mathbb{R}^n$  ist jede beschränkte und abgeschlossene Menge kompakt.  
 (b) Im  $\mathbb{R}^n$  besitzt jede beschränkte Folge eine konvergente Teilfolge (siehe auch 2.3.3, Seite 26).

**Beweis:**

- (a) Sei  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  beschränkt und abgeschlossen und  $(x^{(m)})$  eine Folge in  $A$ . Nach (b) existiert eine konvergente Teilfolge  $(x^{(m_k)})$  mit  $x^{(m_k)} \rightarrow x \in A \cup A' \stackrel{\otimes}{=} A$ . d. h.  $A$  ist kompakt. Dabei gilt  $\otimes$ , da  $A$  abgeschlossen ist.  
 (b) Induktion nach der Dimension  $n$ :

$n = 1$ : Siehe 2.3.3, Seite 26.

$n \mapsto n + 1$ : Sei  $x \in \mathbb{R}^{n+1}$ ,  $x = (x_1, x_2, \dots, x_{n+1})$ .

Setze  $y = (x_2, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^n$ . Spalte die Folgenglieder  $x^{(m)}$  auf in  $x^{(m)} = (x_1^{(m)}, y^{(m)})$  mit  $x_1^{(m)} \in \mathbb{R}$  und  $y^{(m)} \in \mathbb{R}^n$ . Dann ist

$$\|y^{(m)}\|_{(\text{im } \mathbb{R}^n)} \leq \|x^{(m)}\|_{(\text{im } \mathbb{R}^{n+1})} = \sqrt{(x_1^{(m)})^2 + \|y^{(m)}\|^2}.$$

$(y^{(m)})$  ist beschränkt im  $\mathbb{R}^n$ , hat also nach Induktionsvoraussetzung eine konvergente Teilfolge  $(y^{(m_k)})$ . Die reelle Folge  $(x_1^{(m_k)})$  ist beschränkt durch  $|x_1| \leq \|x\|$ , d. h. es existiert eine konvergente Teilfolge  $(x_1^{(m_{k_j})})$ .  $(y^{(m_{k_j})})$  konvergiert, also konvergiert  $(x^{(m_{k_j})})$  auch.

**Bemerkung:** Später wird einfach gesagt: „OBdA<sup>2</sup> sind beschränkte Folgen im  $\mathbb{R}^n$  auch konvergent.“

### 7.3.5 Definition: Cauchyfolge, vollständig, Banachraum

Eine Folge  $(x_n)$  im metrischen Raum  $(M, d)$  heißt *Cauchyfolge*, wenn es zu jedem  $\varepsilon > 0$  ein  $n_0$  gibt mit  $d(x_n, x_m) < \varepsilon$  für  $n > m \geq n_0$ .  $M$  heißt *vollständig*, wenn jede Cauchyfolge in  $M$  konvergent ist (mit Grenzwert in  $M$ ). Ein normierter Raum  $(E, \|\cdot\|)$  heißt *vollständig* oder *Banachraum*, wenn er mit der Metrik  $d(x, y) := \|x - y\|$  vollständig ist.

<sup>2</sup>Soll heißen: „Ohne Bedenken des Autors.“

## 7.3.6 Beispiele/Bemerkungen

- (a) Jede konvergente Folge ist Cauchyfolge.

**Beweis:** Sei  $x_n \rightarrow x$ . Dann ist

$$d(x_n, x_m) \leq \underbrace{d(x_n, x)}_{\substack{< \varepsilon/2 \\ n \geq n_0}} + \underbrace{d(x, x_m)}_{\substack{< \varepsilon/2 \\ m \geq n_0}} < \varepsilon \text{ für } n > m \geq n_0$$

- (b)
- $\mathbb{R}$
- mit
- $|\cdot|$
- ist Banachraum (Cauchy Kriterium).

- (c)
- $\mathbb{R}^n$
- ist ein Banachraum (vollständig mit Euklidnorm).

**Beweis:** Sei  $(x^{(m)})$  eine Cauchyfolge. Dann ist für  $\nu = 1, \dots, n$ 

$$|x_\nu^{(m)} - x_\nu^{(k)}| \leq \|x^{(m)} - x^{(k)}\| < \varepsilon \text{ für } m > k \geq k_0.$$

Also sind  $(x_\nu^{(m)})$  Cauchyfolgen in  $\mathbb{R}$  mit  $x_\nu^{(m)} \rightarrow x_\nu$  für  $m \rightarrow \infty$  und  $\nu = 1, \dots, n$ .  
Zusammen ist dann  $x^{(m)} \rightarrow x = (x_1, \dots, x_n)$ .

- (d)
- $C([a, b])$
- mit
- $\|u\|_\infty = \max_{a \leq t \leq b} |u(t)|$
- ist ein Banachraum.

**Beweis:** Sei  $(u_n)$  eine Cauchyfolge, d. h. zu  $\varepsilon > 0$  existiert ein  $n_0$  mit

$$|u_n(t) - u_m(t)| \leq \|u_n - u_m\|_\infty < \varepsilon \text{ für } n > m \geq n_0 \text{ und } a \leq t \leq b. \quad (7.1)$$

Also konvergiert  $u_n$  gleichmäßig gegen die Grenzfunktion  $u \in C([a, b])$ .Noch zu zeigen, daß  $u_m \rightarrow u$  in der Norm: Aus 7.1 folgt:

$$|u_n(t) - u_m(t)| < \varepsilon.$$

Für  $n \rightarrow \infty$  gilt damit

$$|u(t) - u_m(t)| \leq \varepsilon \text{ für } m \geq n_0, a \leq t \leq b.$$

Also ist

$$\|u - u_m\| \leq \varepsilon \text{ für } m \geq n_0,$$

d. h.  $u_m \rightarrow u$  im Raum (in der Norm).

- (e)
- $C([a, b])$
- mit
- $\|u\| = \sqrt{\int_a^b (u(t))^2 dt}$
- ist
- kein**
- Banachraum.

**Beweis:** Für das Intervall  $[0, 1]$ : Setze

$$u_n(t) = \begin{cases} t^{-1/3} & \text{für } 1/n \leq t \leq 1 \\ n^{1/3} & \text{für } 0 \leq t \leq 1/n \end{cases}.$$

Sei nun  $n > m$ . Dann ist

$$\begin{aligned} \|u_n - u_m\|^2 &= \int_0^{1/m} (u_n(t) - u_m(t))^2 dt = \int_0^{1/n} (n^{1/3} - m^{1/3})^2 dt + \int_{1/n}^{1/m} (t^{-1/3} - m^{1/3})^2 dt \\ &\leq \frac{1}{n} \cdot (n^{1/3})^2 + \int_{1/n}^{1/m} (t^{-1/3})^2 dt = n^{-1/3} + 3t^{1/3} \Big|_{1/n}^{1/m} \\ &< n^{-1/3} + 3 \cdot m^{-1/3} < 4m^{-1/3} < \varepsilon \text{ für } m > \left(\frac{4}{\varepsilon}\right)^3. \end{aligned}$$

Also ist  $(u_n)$  eine Cauchyfolge.

Zeige nun, daß  $(u_n)$  nicht in  $C([0, 1])$  konvergiert.

Annahme:  $\|u_n - u\| \rightarrow 0$  für  $n \rightarrow \infty$  für ein  $u \in C([0, 1])$ . Dann gibt es zu  $\varepsilon > 0$  ein  $n_0$  mit  $\|u_n - u\| < \varepsilon$  für  $n \geq n_0$ .

Sei nun  $\delta \in (0, 1)$  beliebig und  $n$  so groß, daß  $\frac{1}{n} < \delta$  ist.:

$$\int_{\delta}^1 (t^{-1/3} - u(t))^2 dt \leq \int_0^1 (u_n(t) - u(t))^2 dt < \varepsilon^2$$

Es ist also  $u(t) = t^{-1/3}$  in  $[\delta, 1]$ , d. h.  $u(t) = t^{-1/3}$  in  $(0, 1]$ , aber es ist  $u \notin C([0, 1])$ . Widerspruch!  
Also konvergiert  $u$  nicht in  $C([0, 1])$ .

## 7.4 Stetige Funktionen

### 7.4.1 Definition: Stetigkeit

Es seien  $(M, d)$  und  $(N, \varrho)$  metrische Räume und  $f: M \rightarrow N$ .

(1)  $f$  heißt stetig im Punkt  $x_0 \in M$ , wenn es zu jedem  $\varepsilon > 0$  ein  $\delta > 0$  gibt mit

$$\varrho(f(x), f(x_0)) < \varepsilon \text{ für alle } x \in M \text{ mit } d(x, x_0) < \delta.$$

$$[\text{Äquivalent ist: } f(\underbrace{K(x_0, \delta)}_{\subseteq M}) \subseteq \underbrace{K(f(x_0), \varepsilon)}_{\subseteq N}.]$$

(2)  $f$  heißt stetig (in  $M$ ), wenn  $f$  in jedem Punkt  $x_0 \in M$  stetig ist.

(3)  $f$  heißt gleichmäßig stetig, wenn es zu jedem  $\varepsilon > 0$  ein  $\delta > 0$  gibt mit

$$\varrho(f(x), f(y)) < \varepsilon \text{ für } x, y \in M \text{ mit } d(x, y) < \delta.$$

Vergleiche auch mit den entsprechenden Definitionen in  $\mathbb{R}$ : 3.2.1 auf der Seite 48 und 3.2.10 auf der Seite 50.

### 7.4.2 Bemerkungen

(a) Sei  $f: M \setminus \{x_0\} \rightarrow N$ .

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = y_0 : \Longleftrightarrow \text{zu jedem } \varepsilon > 0 \text{ gibt es ein } \delta > 0 \text{ mit}$$

$$\varrho(f(x), y_0) < \varepsilon \text{ für alle } x \in M \text{ mit } d(x, x_0) < \delta, x \neq x_0.$$

(b)  $f$  ist in  $x_0$  stetig

$\Longleftrightarrow$  für jede Folge  $(x_n)$  in  $M \setminus \{x_0\}$  mit  $x_n \rightarrow x_0$  hat  $(f(x_n))$  einen Grenzwert. Der gemeinsame Grenzwert ist dann  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ .

(vgl. Folgenkriterium, 3.1.3 auf Seite 45)

### 7.4.3 Beispiel

Sei  $f: \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$f(x, y) = \frac{|x|^\alpha \cdot |y|^\beta}{x^2 + y^2} \text{ für } \alpha, \beta > 0.$$

**Behauptung:**

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} = 0 \iff \alpha + \beta > 2$$

und der Grenzwert existiert nicht für  $\alpha + \beta \leq 2$ .

**Beweis:** Sei  $t = \max(|x|, |y|)$ . Dann ist

$$\begin{aligned} |f(x, y) - 0| &= \frac{|x|^\alpha \cdot |y|^\beta}{x^2 + y^2} \\ &\leq \frac{t^{\alpha+\beta}}{t^2} \\ &= t^{\alpha+\beta-2} \rightarrow 0 \text{ falls } \alpha + \beta - 2 > 0 \text{ für } (x, y) \rightarrow (0, 0) \end{aligned}$$

Sei nun  $\alpha + \beta \leq 2$ . Dann ist

$$\begin{aligned} f(x, 0) &= 0 \\ f(0, y) &= 0 \\ f(x, x) &= \frac{|x|^{\alpha+\beta}}{2x^2} = \frac{1}{2}|x|^{\alpha+\beta-2} \\ &\xrightarrow{x \rightarrow 0} \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{für } \alpha + \beta = 2 \\ +\infty & \text{für } \alpha + \beta < 2 \end{cases} \end{aligned}$$

Also existiert der Grenzwert nicht.

### 7.4.4 Komposition

Seien  $(M, d)$ ,  $(N, \varrho)$  und  $(P, \sigma)$  metrische Räume,  $g: M \rightarrow N$  sei stetig in  $x_0 \in M$  und  $f: N \rightarrow P$  sei stetig in  $y_0 = g(x_0)$ . Dann ist  $h = f \circ g: M \rightarrow P$ ,  $h(x) := f(g(x))$  stetig in  $x_0$ .

**Beweis:** Wie in 3.2.2 (e), Seite 48.

### 7.4.5 Satz

Sei  $M \subseteq \mathbb{R}^n$ ,  $f: M \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $\mathbb{R}^n$  mit der Euklidmetrik und  $f = (f_1, f_2, \dots, f_m)$ .  $f$  ist genau dann stetig in  $\xi \in M$ , wenn alle  $f_\nu: M \rightarrow \mathbb{R}$  in  $\xi$  stetig sind.

**Beweis:**

„ $\Rightarrow$ “: Für  $\nu = 1, \dots, n$  gilt:

$$\begin{aligned} |f_\nu(x) - f_\nu(\xi)| &\leq \|f(x) - f(\xi)\| \\ &< \varepsilon \text{ für } \|x - \xi\| < \delta, x \in M \end{aligned}$$

Also ist  $f_\nu$  stetig in  $\xi$ .

„ $\Leftarrow$ “:

$$\|f(x) - f(\xi)\| \leq \sum_{\nu=1}^m \underbrace{|f_\nu(x) - f_\nu(\xi)|}_{< \varepsilon/m}$$

für  $\|x - \xi\| < \delta_\nu$ .

Gilt nun  $\|x - \xi\| < \delta = \min\{\delta_\nu : \nu = 1, \dots, m\}$ , dann ist

$$\|f(x) - f(\xi)\| \leq \sum_{\nu=1}^m |f_\nu(x) - f_\nu(\xi)| < \varepsilon.$$

#### 7.4.6 Regeln für Funktionen vom Typ $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$

Sei  $M \subseteq \mathbb{R}^n$ ,  $f, g: M \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $\xi \in M$  und  $f, g$  stetig in  $\xi$  (in ganz  $M$ ). Dann ist

- (a)  $f + g$
- (b)  $\lambda f$  für  $\lambda \in \mathbb{R}$
- (c) das Skalarprodukt  $f \cdot g = f_1 g_1 + \dots + f_m g_m$

stetig in  $\xi$  (in ganz  $M$ ).

**Beweis:** Wie in  $\mathbb{R}$ , siehe 3.2.2 auf Seite 48.

#### 7.4.7 Satz

Ist  $A \subseteq M$  kompakt und  $f: A \rightarrow N$  stetig, so ist  $f(A) \subseteq N$  kompakt.

**Beweis:** Sei  $(y_n)$  Folge in  $f(A)$ , d. h.  $y_n = f(x_n)$  mit einem  $x_n \in A$ . Dann ist  $(x_n)$  Folge in  $A$  und es existiert eine konvergente Teilfolge  $x_{n_k} \rightarrow \xi \in A$ . Dann gilt wegen der Stetigkeit von  $f$  für  $k \rightarrow \infty$

$$y_{n_k} = f(x_{n_k}) \rightarrow f(\xi) \in f(A).$$

#### 7.4.8 Satz vom Minimum und Maximum

Sei  $A \subseteq M$  kompakt,  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$  sei stetig. Dann gibt es  $x_*, x^* \in A$  mit

$$f(x_*) \leq f(x) \leq f(x^*) \text{ für alle } x \in A.$$

Vergleiche auch mit 3.2.4 auf Seite 49.

**Beweis:** Da  $A$  kompakt ist, ist auch  $B = f(A)$  kompakt. Zeige nun noch (als Aufgabe): Aus der Kompaktheit von  $B \subseteq \mathbb{R}^n$  folgt  $\max B \in B$  und  $\min B \in B$ .

Idee: Nehme Folge  $b_n \in B$  mit  $b_n \rightarrow \sup B$ .  $\sup B < \infty$ ?  $\sup B \in B$ ?  $\Rightarrow \max$ .

#### 7.4.9 Definition: Äquivalenz von Normen

Sei  $E$  ein Vektorraum über  $\mathbb{R}$ . Zwei Normen  $\|\cdot\|_\alpha$  und  $\|\cdot\|_\beta$  heißen äquivalent, wenn es  $A > 0$  und  $B > 0$  gibt mit

$$\|x\|_\beta \leq B\|x\|_\alpha \text{ und } \|x\|_\alpha \leq A\|x\|_\beta \text{ für alle } x \in E.$$

### 7.4.10 Beispiel

Sei  $E = \mathbb{R}^n$  mit der Euklidnorm  $\|\cdot\|$  und der Summennorm  $\|\cdot\|_1$ . Dann ist

$$\|x\|_1 = \sum_{\nu=1}^n 1 \cdot |x_\nu| \stackrel{\text{CSU}}{\leq} \sqrt{\sum_{\nu=1}^n 1^2} \cdot \sqrt{\sum_{\nu=1}^n x_\nu^2} = \sqrt{n} \cdot \|x\|$$

und

$$\|x\| \leq \|x\|_1.$$

### 7.4.11 Satz

Im  $\mathbb{R}^n$  sind alle Normen äquivalent.

**Beweis:** Für Die Euklidnorm  $\|\cdot\|$  und eine beliebige Norm  $|\cdot|_N$ .

Sei  $S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| = 1\}$  die „Oberfläche der Einheitskugel“.

Sei  $f: S^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $f(x) = |x|_N$ . Behauptung:  $f$  ist stetig:

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &= ||x|_N - |y|_N| \leq |x - y|_N \\ &= \left| \sum_{\nu=1}^n (x_\nu - y_\nu) e^\nu \right|_N \end{aligned}$$

mit  $e^\nu$ , dem  $\nu$ -ten Einheitsvektor

$$\begin{aligned} &\leq \sum_{\nu=1}^n \underbrace{|x_\nu - y_\nu|}_{a_\nu} \cdot |e^\nu|_N \\ &\stackrel{\text{CSU}}{\leq} \underbrace{\sqrt{\sum_{\nu=1}^n |e^\nu|_N^2}}_{=:C} \cdot \|x - y\| \end{aligned}$$

Wähle für  $\varepsilon > 0$  nun  $\delta = \frac{\varepsilon}{C}$ . Dann hat  $f$  Minimum/Maximum auf  $S^{n-1}$ :

$$0 < m \leq f(x) \leq M < \infty \text{ auf } S^{n-1}.$$

$$m \cdot \|x\| \leq |x|_N \leq M \cdot \|x\| \text{ für } x \in S^{n-1}.$$

Sei nun  $x \neq 0$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$ . Setze  $\xi = \frac{x}{\|x\|} \in S^{n-1}$ . Dann ist  $|\xi|_N \leq M$  und

$$M \geq |\xi|_N = \left| \frac{x}{\|x\|} \right|_N = \left| \frac{1}{\|x\|} \cdot x \right|_N = \frac{1}{\|x\|} \cdot |x|_N,$$

also

$$|x|_N \leq M \cdot \|x\| \text{ für } x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \text{ (auch für } x = 0)$$

Zeige genauso:  $|x|_N \geq m \cdot \|x\|$ .

### 7.4.12 Bemerkung

Die Begriffe „innerer Punkt“, „Häufungspunkt“, „Randpunkt“,  $A^0$ ,  $\bar{A}$ ,  $A'$ ,  $\partial A$ , „Konvergenz von Folgen“ und „Stetigkeit von Funktionen“ sind unabhängig definiert von der verwendeten Norm (dies gilt für alle endlich dimensional Räume).

### 7.4.13 Beispiel

Betrachte den Raum  $C([a, b])$ . Die Normen

$$\|u\|_\infty = \max_{a \leq t \leq b} |u(t)| \text{ und } \|u\| = \sqrt{\int_a^b (u(t))^2 dt}$$

sind nicht äquivalent!

**Beweis:** Hier konkret für das Intervall  $[a, b] = [0, 1]$ : Es ist

$$\|u\|^2 = \int_0^1 (u(t))^2 dt \leq \max_{0 \leq t \leq 1} |u(t)|^2 = \|u\|_\infty^2,$$

also ist  $\|u\| \leq \|u\|_\infty$ .

Dagegen ist  $\|u\|_\infty \leq C \cdot \|u\|$  für alle  $u \in C([0, 1])$  nicht möglich.

Annahme: Ein solches festes  $C > 0$  existiert doch. Setze

$$u_n(t) = \begin{cases} t^{-1/3} & \text{in } [\frac{1}{n}, 1] \\ n^{1/3} & \text{in } [0, \frac{1}{n}] \end{cases}.$$

Es ist

$$\|u_n\|_\infty = n^{1/3}$$

und

$$\|u_n\|^2 < \int_0^1 t^{-2/3} dt = 3t^{1/3} \Big|_0^1 = 3,$$

also ist

$$\|u_n\| < \sqrt{3}$$

und es muß gelten:

$$n^{1/3} = \|u_n\|_\infty \leq C \|u_n\| < C\sqrt{3} \text{ Widerspruch!}$$

## 7.5 Mehr über stetige Funktionen

### 7.5.1 Satz von Heine

Ist  $A \subseteq M$  kompakt und  $f: A \rightarrow N$  stetig, so ist  $f$  gleichmäßig stetig (vergleiche auch mit 3.2.12, Seite 51).

**Beweis:** Annahme:  $f: M \rightarrow N$   $[(M, d)$  und  $(N, \varrho)]$  ist nicht gleichmäßig stetig.

Zu  $\delta = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}$  existieren die Folgen  $x_n, y_n \in A$  mit  $d(x_n, y_n) < \frac{1}{n}$ , aber mit  $\varrho(f(x_n), f(y_n)) \geq \eta > 0$ .

OBdA sei  $(x_n)$  konvergent (Kompaktheit, anderenfalls wähle konvergente Teilfolge):

$$x_n \rightarrow x \in A \text{ und } y_n \rightarrow x.$$

$$0 < \eta \leq \varrho(f(x_n), f(y_n)) \xrightarrow{\text{Stetigkeit}} \varrho(f(x), f(x)) = 0 \text{ Widerspruch!}$$

### 7.5.2 Satz über die Umkehrfunktion

Sei  $A \subseteq M$  kompakt,  $f: A \rightarrow N$  sei stetig und injektiv. Dann ist  $f^{-1}: f(A) \rightarrow A$  stetig (siehe auch 3.2.9, Seite 50).

**Beweis:** Sei  $y \in f(A)$  mit  $y = f(x)$ ,  $x = f^{-1}(y)$ .

Zeige:  $\lim_{n \rightarrow \infty} f^{-1}(y_n) = x = f^{-1}(y)$  für jede Folge  $(y_n)$  in  $f(A)$  mit  $y_n \rightarrow y$ .

Setze  $x_n = f^{-1}(y_n)$ .  $(x_n)$  ist Folge in  $A$ . Sei  $(x_{n_k})$  eine konvergente Teilfolge mit  $x_{n_k} \rightarrow x' \in A$ . Dann ist

$$f(x') = \lim_{k \rightarrow \infty} f(x_{n_k}) = \lim_{k \rightarrow \infty} y_{n_k} = y.$$

Da  $f$  injektiv ist, ist  $x' = x$ . Dann gilt sogar (denn alle  $x_{n_k} \rightarrow x$ ):  $x_n \rightarrow x$ .  
Wenn  $f^{-1}$  nicht stetig sein soll, dann existiert eine Teilfolge  $(x_{n_j})$  mit

$$d(x, x_{n_j}) \geq \eta > 0 \text{ für } j = 1, 2, 3, \dots$$

$(x_{n_j})$  hat eine konvergente Teilfolge  $(x_{n_{j_k}})$ , die auch Teilfolge von  $(x_n)$  ist. Damit ist  $x_{n_{j_k}} \rightarrow x$  für  $j \rightarrow \infty$ . Also ist

$$0 < \eta \leq d(x, x_{n_{j_k}}) \rightarrow 0 \text{ Widerspruch!}$$

### 7.5.3 Definition

Seien  $f_n, f: M \rightarrow N$  gegeben ( $n = 1, 2, \dots$ ).  $f_n$  heißt gleichmäßig konvergent gegen  $f$ , wenn es zu jedem  $\varepsilon > 0$  ein  $n_0 \in \mathbb{N}$  gibt mit

$$\varrho(f_n(x), f(x)) < \varepsilon \text{ für } n \geq n_0 \text{ und für alle } x \in M.$$

Siehe auch 3.3.1, Seite 52.

### 7.5.4 Satz

Gilt  $f_n \rightarrow f$  gleichmäßig und sind alle  $f_n$  stetig [in  $\xi \in M$  oder in  $M$ ], dann ist auch  $f$  stetig (siehe auch 3.3.4, Seite 53).

**Beweis:** Wie bei  $f_n: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ .

### 7.5.5 Banachscher Fixpunktsatz

Sei  $(M, d)$  ein vollständiger metrischer Raum und  $T: M \rightarrow M$  eine Kontraktion, d. h. zu einem  $q \in (0, 1)$  ist  $d(Tx, Ty) \leq q \cdot d(x, y)$  für alle  $x, y \in M$ .

Dann hat  $T$  genau einen Fixpunkt  $x^*$  mit  $x^* = Tx^*$ .

Ist  $x_0 \in M$  beliebig und  $x_{n+1} = Tx_n$ , so ist

$$d(x_n, x^*) \leq q^n \cdot \frac{d(x_1, x_0)}{1 - q},$$

insbesondere gilt  $x_n \rightarrow x^*$ . Man nennt  $(x_n)$  Folge der *sukzessiven Approximation*.

**Beweis:**

**Eindeutigkeit:** Sei  $x = Tx$  und  $y = Ty$ . Dann ist

$$d(x, y) = d(Tx, Ty) \leq q \cdot d(x, y).$$

Damit ist dann

$$\underbrace{(1 - q)}_{\geq 0} \cdot d(x, y) \leq 0.$$

Es ist also  $d(x, y) = 0$ , d. h.  $x = y$ .

**Existenz:** Sei  $x_0 \in M$  und  $x_{n+1} = Tx_n$ . Für  $n \geq 2$  gilt dann:

$$d(x_n, x_{n-1}) = d(Tx_{n-1}, Tx_{n-2}) \leq q \cdot d(x_{n-1}, x_{n-2}).$$

Mit Induktion gilt dann:  $d(x_n, x_{n-1}) \leq q^{n-1} \cdot d(x_1, x_0)$ .

Sei nun  $n > m$  beliebig. Dann ist

$$\begin{aligned} d(x_n, x_m) &\leq \sum_{j=m+1}^n \underbrace{d(x_j, x_{j-1})}_{\leq q^{j-1} d(x_1, x_0)} \leq d(x_0, x_1) \sum_{j=m+1}^n q^{j-1} \\ &= d(x_0, x_1) q^m \sum_{k=0}^{n-m-1} q^k < d(x_0, x_1) q^m \cdot \frac{1}{1 - q} \end{aligned}$$

Also ist  $(x_n)$  eine Cauchyfolge.

Gelte nun  $x_n \rightarrow x^*$ . Für  $n > m$  gilt

$$d(x_n, x_m) < \frac{d(x_0, x_1)}{1 - q} \cdot q^m$$

und für  $n \rightarrow \infty$  ist dann

$$d(x^*, x_m) \leq \frac{d(x_0, x_1)}{1 - q} \cdot q^m$$

Gilt nun  $x^* = Tx^*$ ?

$$Tx^* = T\left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n\right) \stackrel{T \text{ ist stetig}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} Tx_n = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = x^*$$

### 7.5.6 Beispiel: Fredholmsche Integralgleichung

Sei  $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig und sei  $k: [a, b] \times [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig. Sei

$$f(x) = g(x) + \int_a^b k(x, y) f(y) dy \quad (7.2)$$

Gesucht ist  $f \in C([a, b])$  mit (7.2).

**Behauptung:** Gilt  $\max\{|k(x, y)|: a \leq x, y \leq b\} < \frac{1}{b-a}$ , dann hat (7.2) genau eine Lösung  $f \in C([a, b])$ .

**Beweis:**

- (1) Zeige: Aus  $f \in C([a, b])$  folgt, daß  $\tilde{f}(x) = \int_a^b k(x, y)f(y) dy$  stetig ist in  $[a, b]$ .

**Beweis:** Sei  $\varepsilon > 0$ . Da  $k$  gleichmäßig stetig ist, gibt es ein  $\delta > 0$  mit

$$|k(x, y) - k(x', y)| < \varepsilon \text{ für } a \leq y \leq b, a \leq x, x' \leq b, |x - x'| < \delta.$$

Außerdem ist  $|f(x)| \leq M$  in  $[a, b]$ .

$$\begin{aligned} |\tilde{f}(x) - \tilde{f}(x')| &= \left| \int_a^b (k(x, y) - k(x', y))f(y) dy \right| \leq \int_a^b \underbrace{|k(x, y) - k(x', y)|}_{< \varepsilon \text{ für } |x-x'| < \delta} \cdot M dy \\ &< M \cdot \varepsilon(b-a) = M(b-a) \cdot \varepsilon \end{aligned}$$

- (2) Setze

$$(Tf)(x) := g(x) + \int_a^b k(x, y)f(y) dy$$

mit  $T: C([a, b]) \rightarrow C([a, b])$ .

- (3)  $C([a, b])$  mit  $\|f\|_\infty := \max_{a \leq x \leq b} |f(x)|$  ist vollständig.

- (4) Ist  $T$  eine Kontraktion?

Nach Voraussetzung existiert ein  $q \in (0, 1)$  mit  $|k(x, y)| \leq \frac{q}{b-a}$  für alle  $(x, y)$ .

Seien  $f, \varphi \in C([a, b])$ :

$$\begin{aligned} |(Tf)(x) - (T\varphi)(x)| &= \left| \int_a^b k(x, y) \cdot (f(y) - \varphi(y)) dy \right| \\ &\leq \int_a^b \underbrace{|k(x, y)|}_{\leq \frac{q}{b-a}} \cdot \underbrace{|f(y) - \varphi(y)|}_{\leq \|f - \varphi\|_\infty} dy \\ &\leq \frac{q}{b-a} \|f - \varphi\|_\infty (b-a) = q \|f - \varphi\|_\infty \end{aligned}$$

Also ist

$$\|Tf - T\varphi\|_\infty \leq q \|f - \varphi\|_\infty$$

Die Bedingungen für den Banachschen Fixpunktsatz sind also erfüllt.

Um die Fixfunktion  $f^*$  anzunähern, wählt man ein beliebiges  $f_0 \in C([a, b])$  und berechnet iterativ

$$f_{n+1}(x) = g(x) + \int_a^b k(x, y)f_n(y) dy.$$

Dabei gilt als Fehlerabschätzung für  $a \leq x \leq b$ :

$$|f_n(x) - f^*(x)| \leq \frac{\|f_0 - f_1\|_\infty}{1-q} \cdot q^n$$

### 7.5.7 Beispiel: Der Satz von Picard-Lindelöf

Sei  $f: [a, b] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  stetig und

$$|f(t, u) - f(t, \bar{u})| \leq L \cdot |u - \bar{u}|$$

für  $a \leq t \leq b$  und  $u, \bar{u} \in \mathbb{R}$ .

Gesucht ist die Lösung für das Anfangswertproblem (AWP)

$$u' = f(t, u), \quad u(a) = \alpha.$$

Für die Lösung  $u$  gilt:  $u \in C^1([a, b])$  mit

$$u'(t) = f(t, u(t)), \quad u(a) = \alpha \in \mathbb{R}.$$

**Behauptung:** (AWP) hat genau eine Lösung.

**Beweis:** (AWP) ist äquivalent zu der Integralgleichung (IGL)

$$u(t) = \alpha + \int_a^t f(s, u(s)) \, ds,$$

denn für eine Lösung  $u \in C^1([a, b])$  von (AWP) gilt:

$$\begin{aligned} u(t) - u(a) &= u(t) - \alpha \\ &= \int_a^t u'(s) \, ds \\ &= \int_a^t f(s, u(s)) \, ds \end{aligned}$$

$u$  ist also auch Lösung von (IGL).

Sei nun  $u \in C([a, b])$  Lösung von (IGL):

$$u(t) = \alpha + \int_a^t f(s, u(s)) \, ds$$

Da  $u \in C([a, b])$  ist, ist  $f(s, u(s))$  stetig in  $[a, b]$ .

Also ist  $\int_a^b f(s, u(s)) \, ds$  stetig differenzierbar, d. h. auch  $u$  ist stetig differenzierbar.

Es ist

$$\frac{d}{dt} u(t) = f(t, u(t)) \quad \text{und} \quad u(a) = \alpha.$$

Damit ist die Äquivalenz von (AWP) und (IGL) gezeigt.

Definiere nun  $T$  mit

$$T: \begin{cases} C([a, b]) & \rightarrow C([a, b]) \\ (Tu)(t) & = \alpha + \int_a^t f(s, u(s)) \, ds \end{cases}.$$

Besitzt  $T$  genau einen Fixpunkt? Versuche dies mit Hilfe des Banachschen Fixpunktsatzes zu zeigen. Definiere dazu folgende Norm auf  $C([a, b])$ :

$$\|u\| = \max_{a \leq t \leq b} \{|u(t)| \cdot \exp(-2L(t-a))\}$$

(Nachweis der Normeigenschaften als Aufgabe).

**Behauptung:**  $T$  ist eine Kontraktion mit  $q = \frac{1}{2}$ .

Seien  $u, v \in C([a, b])$ . Dann ist

$$\begin{aligned} |(Tu)(t) - (Tv)(t)| &= \left| \int_a^t (f(s, u(s)) - f(s, v(s))) ds \right| \\ &\leq \int_a^t \underbrace{|f(s, u(s)) - f(s, v(s))|}_{\leq L|u(s) - v(s)|} ds \\ &\leq L \int_a^t \underbrace{|u(s) - v(s)| \cdot \exp(-2L(s-a))}_{\leq \|u-v\|} \cdot \exp(2L(s-a)) ds \\ &\leq L\|u - v\| \cdot \left. \frac{\exp(2L(s-a))}{2L} \right|_a^t \\ &< L\|u - v\| \cdot \frac{\exp(2L(t-a))}{2L} \\ &= \|u - v\| \cdot \frac{\exp(2L(t-a))}{2} \end{aligned}$$

Also ist

$$|(Tu)(t) - (Tv)(t)| \cdot \exp(-2L(t-a)) < \frac{1}{2} \|u - v\|$$

und damit

$$\|Tu - Tv\| = \max\{|(Tu)(t) - (Tv)(t)| \cdot \exp(-2L(t-a))\} \leq \frac{1}{2} \|u - v\|.$$

Für den Banachschen Fixpunktsatz fehlt noch die Vollständigkeit von  $C([a, b])$  mit der Norm  $\|\cdot\|$ . Zeige, daß  $\|\cdot\|$  äquivalent zu  $\|\cdot\|_\infty$  ist.

Es ist

$$\|u\| \leq \|u\|_\infty,$$

da  $\exp(-2L(t-a)) \leq 1$  in  $[a, b]$ . Außerdem ist

$$|u(t)| \cdot \exp(-2L(t-a)) \geq |u(t)| \cdot \underbrace{\exp(-2L(b-a))}_{=:\frac{1}{C}}$$

Damit ist

$$|u(t)| \leq C|u(t)| \exp(-2L(t-a)) \leq C\|u\|.$$

Da dies für  $a \leq t \leq b$  gilt, ist

$$\|u\|_\infty \leq C\|u\|.$$

Insbesondere gilt:

$$\begin{aligned} \|u_n - u_m\|_\infty &\leq C\|u_n - u_m\| \\ \|u_n - u_m\| &\leq \|u_n - u_m\|_\infty. \end{aligned}$$

Also ist der Raum vollständig, der Banachsche Fixpunktsatz kann angewendet werden, d. h.  $T$  hat genau einen Fixpunkt.

### 7.5.8 Konkretes Beispiel für den Satz von Picard-Lindelöf

Gesucht ist  $u \in C([0, t_0])$  mit

$$u' = t + u \text{ und } u(0) = 0 \text{ in } [0, t_0] \times \mathbb{R}.$$

Hier ist  $f(t, u) = t + u$ .

Setze  $L = 1$  und berechne  $u$  nach dem folgenden System:

Wähle  $u_0 \in C([0, t_0])$  und berechne dann sukzessive

$$u_{n+1} = \int_0^t (s + u_n(s)) ds = \frac{t^2}{2} + \int_0^t u_n(s) ds.$$

**Speziell:** Wähle  $u_0(t) \equiv 0$ . Dann ist

$$\begin{aligned} u_1(t) &= \frac{t^2}{2} \\ u_2(t) &= \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{2 \cdot 3} \\ u_3(t) &= \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{2 \cdot 3} + \frac{t^4}{2 \cdot 3 \cdot 4} \\ &\vdots \\ u_n(t) &= \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{t^{n+1}}{2 \cdot 3 \cdots (n+1)}. \end{aligned}$$

Zeige dies für  $u_n(t)$  per Induktion.

Es gilt:

$$\begin{array}{ccc} u_n(t) & = & \sum_{j=2}^{n+1} \frac{t^j}{j!} \\ \downarrow & & \downarrow \\ u(t) & = & e^t - 1 - t \end{array}$$

Führe eine **Probe** durch:

Es ist  $u' = e^t - 1$  und  $t + u = e^t - 1$ , die beiden sind also gleich. Außerdem ist  $u(0) = 0$ .

### 7.5.9 Definition

Sei  $(M, d)$  ein metrischer Raum,  $A \subseteq M$ ,  $A \neq \emptyset$  und  $(O_\lambda)$  sein ein System von offenen Mengen mit  $O_\lambda \subseteq M$  für  $\lambda \in \Lambda$ .

$(O_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$  heißt *offene Überdeckung* von  $A$ , wenn  $A \subseteq \bigcup_{\lambda \in \Lambda} O_\lambda$  ist. Gilt bereits  $A \subseteq \bigcup_{j=1}^m O_{\lambda_j}$  für gewisse  $\lambda_j$ , so heißt  $(O_{\lambda_j})_{j=1, \dots, m}$  eine *endliche Teilüberdeckung*.

### 7.5.10 Beispiel

Sei  $A = (0, 1] \subseteq \mathbb{R}$  und  $I_n = (\frac{1}{n}, 2)$  für  $n = 1, 2, \dots$

Es gilt  $(0, 1] \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} (\frac{1}{n}, 2)$  (Aufgabe!)

und  $(I_n)$  enthält keine endliche Teilüberdeckung, denn sonst wäre

$$(0, 1] \subseteq \bigcup_{j=1}^m \left(\frac{1}{j}, 2\right) = \left(\frac{1}{m}, 2\right) \quad \text{Widerspruch!}$$

### 7.5.11 Satz von Heine-Borel

$A \subseteq M$  ist genau dann kompakt, wenn *jede* offene Überdeckung von  $A$  eine endliche Teilüberdeckung enthält.

**Beweis:**

„ $\Leftarrow$ “: Zu zeigen ist:  $(x_n)$  hat eine konvergente Teilfolge  $(x_{n_k})$  mit  $x_{n_k} \rightarrow x \in A$ .

Widerspruchsbeweis:

Sei  $(x_n)$  eine Folge in  $A$ , die keine konvergente Teilfolge mit Grenzwert in  $A$  hat.

Sei  $a \in A$ . Dann existiert ein  $r(a) > 0$ , so daß

$$K(a) := K(a, r(a))$$

höchstens ein  $x_n$  enthält.

$(K(a))_{a \in A}$  ist eine offene Überdeckung von  $A$ . Es werden aber unendlich viele  $U_a$  benötigt, um  $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$  zu überdecken, also auch für  $A$ . Widerspruch!

„ $\Rightarrow$ “: Sei  $A$  kompakt und  $(O_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$  eine offene Überdeckung.

Sei nun  $a \in A$  und

$$r : \begin{cases} A & \rightarrow \mathbb{R} \\ r(a) & := \sup\{\varrho < 1 : K(a, \varrho) \subseteq O_\lambda \text{ für ein } \lambda \in \Lambda\} \end{cases}.$$

Behauptung:  $r$  ist stetig.

Beweis: Sei  $x \in A$  fest. Dann gilt  $0 < \varrho < r(x)$  und  $d(y, x) < r(x)$ ,  $d(x, y) < \varrho$ .

Suche nun eine Abschätzung

$$r(y) \geq ?$$

Setzt man  $\delta = d(x, y)$ , so gilt

$$K(y, \varrho - \delta) \subseteq K(x, \varrho) \subseteq O_\lambda.$$

Also ist

$$r(y) \geq \varrho - \delta, \quad \varrho \leq r(y) + d(x, y)$$

$$\Rightarrow r(x) \leq r(y) + d(x, y)$$

$$\rightarrow r(x) - r(y) \leq d(x, y).$$

Dies gilt auch, wenn  $d(x, y) \geq r(x)$  ist (trivial!).

Genauso gilt auch

$$r(y) - r(x) \leq d(x, y).$$

Damit gilt dann:

$$|r(x) - r(y)| \leq d(x, y) \quad \text{Bedingung für die Stetigkeit}$$

Also ist  $r$  stetig.

Da  $A$  kompakt ist, hat  $r$  ein positives Minimum  $= 2 \cdot r_0$ .

Zu jedem  $x \in A$  existiert ein  $\lambda$  mit

$$K(x, r_0) \subseteq O_\lambda$$

Also ist  $(K(x, r_0))_{x \in A}$  eine offene Überdeckung von  $A$ .

Zeige nun noch, daß  $(K(x, r_0))_{x \in A}$  eine endliche Teilüberdeckung enthält und damit auch  $(O_\lambda)$  selbst.

Annahme: Es gibt keine endliche Teilüberdeckung.

Sei  $x_0 \in A$  beliebig. dann existieren:  $x_1 \in A \setminus K(x_0, r_0)$

$x_2 \in A \setminus (K(x_0, r_0) \cup K(x_1, r_0))$

$\vdots$

$x_n \in A \setminus (K(x_0, r_0) \cup \dots \cup K(x_{n-1}, r_0))$ .

$(x_n)$  ist eine Folge in  $A$ .

Für  $n > m$  gilt dann  $d(x_n, x_m) \geq r_0$  und  $x_n \notin K(x_m, r_0)$ .

Es gibt also keine konvergente Teilfolge in  $A$ . Widerspruch!

Also enthält  $(K(x, r_0))_{x \in A}$  eine endliche Teilüberdeckung und  $(O_\lambda)$  enthält ebenfalls eine endliche Teilüberdeckung.

## 7.6 Zusammenhang

In diesem Abschnitt ist  $(M, d)$  ein metrischer Raum, insbesondere meistens  $\mathbb{R}^n$  mit der euklidischen Metrik oder  $\mathbb{R}$  mit dem absoluten Betrag  $|\cdot|$ .

### 7.6.1 Definition: Partition, zusammenhängend

Sei  $E \subseteq M$ ,  $E \neq \emptyset$  und  $A, B \subseteq M$ .

$(A, B)$  heißt *Partition* von  $E$ , wenn gilt:

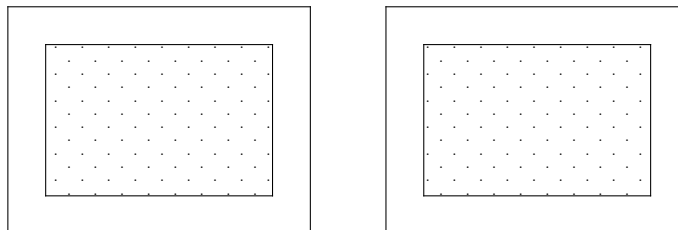
- (1)  $A$  und  $B$  sind offen
- (2)  $E \subseteq A \cup B$
- (3)  $E \cap A \cap B = \emptyset$
- (4)  $E \cap A \neq \emptyset$  und  $E \cap B \neq \emptyset$ .

$E$  heißt *zusammenhängend*, wenn es keine Partition von  $E$  gibt.

### 7.6.2 Anschauliche Beispiele

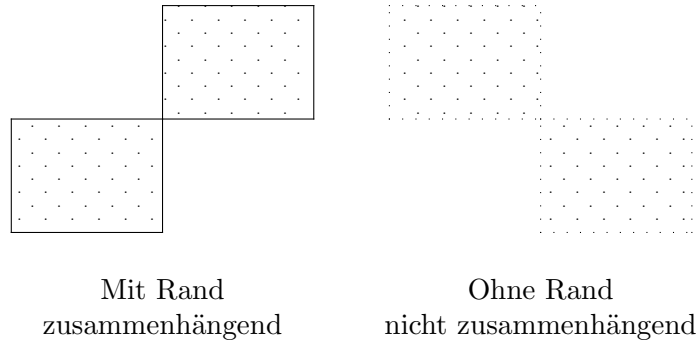
(a) Intervall in  $\mathbb{R}$ : 

(b)



Die hier gezeigte Menge ist nicht zusammenhängend.

(c)



### 7.6.3 Bemerkung

In der Definition des Zusammenhanges kann man „offen“ durch „abgeschlossen“ ersetzen.

**Beweis:** Setze  $\tilde{A} = M \setminus A$  und  $\tilde{B} = M \setminus B$ .

$\tilde{A}$  und  $\tilde{B}$  sind offen, wenn  $A$  und  $B$  abgeschlossen sind.

$(A, B)$  ist Partition von  $E$ ;  $A$  und  $B$  sind abgeschlossen.

Zeige:  $(\tilde{A}, \tilde{B})$  ist Partition von  $E$ .

(1)  $\tilde{A}$  und  $\tilde{B}$  sind offen ✓

(2) Es gilt  $E \subseteq A \cup B$ ,  $E \not\subseteq A$  und  $E \not\subseteq B$  (wegen (3), (4))  
 $\Rightarrow E \subseteq \tilde{A} \cup \tilde{B}$ , denn

$$x \in E \Rightarrow \begin{cases} x \in A \Rightarrow x \notin B \Rightarrow x \in \tilde{B} \\ x \in B \Rightarrow x \notin A \Rightarrow x \in \tilde{A} \end{cases}$$

(3) Sei  $x \in E \cap \tilde{A} \cap \tilde{B}$ .

Dann ist  $x \in E$ ,  $x \notin A$  und  $x \notin B$ .

Das heißt, es gibt ein  $x \in E$  mit  $x \notin A$  und  $x \notin B$ .

Dies ist ein Widerspruch zu (2), also kann es so ein  $x$  nicht geben.

(4) Sei  $E \cap \tilde{A} = \emptyset$  und sei  $x \in E$ .

Dann ist  $x \in M \setminus \tilde{A} = A$  für alle  $x \in E$ .

Das heißt, daß  $E \subseteq A$  ist. Widerspruch zu (3) und (4),

da  $\emptyset \neq E \cap B \subseteq E \cap A \cap B$  Widerspruch zu (3).

### 7.6.4 Definition: Gebiet

Eine offene und zusammenhängende Menge heißt *Gebiet*.

### 7.6.5 Satz

Ist  $f: E \rightarrow N$  [( $N, \rho$ ) sei dabei ein metrischer Raum] stetig und  $E$  zusammenhängend, so ist  $f(E)$  zusammenhängend.

**Beweis:** Annahme:  $(\tilde{A}, \tilde{B})$  sei Partition von  $f(E)$ .

Zu  $y = f(x) \in \tilde{A}$  und zu  $\varepsilon > 0$  existiert ein  $\delta > 0$  mit

$$f(K(x, \delta) \cap E) \subseteq K(y, \varepsilon), \quad \delta = \delta(\varepsilon, x) = \delta(x) \text{ für festes } \varepsilon$$

$$A = \bigcup_{f(x) \in \tilde{A}} \underbrace{K(x, \delta(x))}_{\text{offen}} \text{ ist offene Menge}$$

Genauso:

$$B = \bigcup_{f(x) \in \tilde{B}} \underbrace{K(x, \delta(x))}_{\text{offen}} \text{ ist offene Menge}$$

Ist  $(A, B)$  Partition von  $E$ ?

(1)  $A$  und  $B$  sind offen ✓

(2) ✓ nach Konstruktion

(3) Sei  $x \in E \cap A \cap B$

Dann ist  $f(x) \in \tilde{A}$  und  $f(x) \in \tilde{B}$

Also ist  $\tilde{A} \cap \tilde{B} \neq \emptyset$

Daraus folgt, daß  $\tilde{A} \cap \tilde{B} \cap f(E) \neq \emptyset$  ist. Widerspruch zu (3)

Also ist  $E \cap A \cap B = \emptyset$ .

(4) Wäre  $E \cap A = \emptyset$ , also  $E \subseteq B$ ,

dann wäre  $\tilde{B} \supseteq f(B \cap E) = f(E)$ . Widerspruch! zu (3) und (4)

Also ist  $E \cap A \neq \emptyset$  und genauso  $E \cap B \neq \emptyset$

Zusammen ist  $(A, B)$  damit Partition von  $E$ . Widerspruch! zu:  $E$  ist zusammenhängend. Es gibt also keine Partition von  $f(E)$ , d. h.  $f(E)$  ist zusammenhängend.

### 7.6.6 Zwischenwertsatz

Eine Menge  $E$  ist genau dann zusammenhängend, wenn jede stetige Funktion  $f: E \rightarrow \mathbb{R}$  die Zwischenwerteigenschaft hat, d. h. wenn  $f(E)$  ein Intervall ist.

**Beweis:**

„ $\Leftarrow$ “: Sei  $E$  nicht zusammenhängend und  $(A, B)$  Partition von  $E$ .

Setze

$$f: E \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} 0 & x \in E \cap A \\ 1 & x \in E \cap B \end{cases}$$

$$f(E) = \{0, 1\}$$

Behauptung:  $f$  ist stetig.

Sei z. B.  $x_0 \in A \cap E$ ,  $f(x_0) = 0$ .

Dann existiert ein  $\delta > 0$  mit  $K(x_0, \delta) \subseteq A$ , da  $A$  offen ist.

In  $K(x_0, \delta) \cap E$  ist  $f(x) = 0$ , also ist  $f$  stetig in  $x_0$ .

Da  $f(E) = \{0, 1\}$  kein Intervall ist, aber nach Voraussetzung ein Intervall sein muß, erhält man einen Widerspruch!

$\Rightarrow E$  ist doch zusammenhängend.

„ $\Rightarrow$ “: Sei  $E$  zusammenhängend,  $f: E \rightarrow \mathbb{R}$  stetig, aber  $f(E)$  kein Intervall.  
 Dann gibt es  $a < b$  mit  $a, b \in f(E)$ , aber  $c \in (a, b)$  mit  $c \notin f(E)$ .  
 Setze damit

$$A = \{x: f(x) < c\} \text{ und } B = \{x: f(x) > c\}.$$

$A$  und  $B$  sind offen. Überprüfe die Definition für die Partition  $(A, B)$ :

- (1) ✓
- (2) ✓, da  $f(x) \neq c$  für alle  $x \in E$ .
- (3) ✓, da sogar  $A \cap B \neq \emptyset$ .
- (4) Es gibt  $\alpha$  mit  $f(\alpha) = a$ : Es ist  $\alpha \in A$ .  
 Es gibt  $\beta$  mit  $f(\beta) = b$ : Es ist  $\beta \in B$ .

Zusammen ist damit  $(A, B)$  eine Partition der zusammenhängenden Menge  $E$ . Widerspruch!  
 Also ist  $f(E)$  ein Intervall.

### 7.6.7 Satz

Die zusammenhängenden Teilmengen von  $\mathbb{R}$  sind genau die Intervalle.

**Beweis:**

„ $\Rightarrow$ “: Sei  $E \subseteq \mathbb{R}$  zusammenhängend und setze  $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x$ . Dann ist nach dem Zwischenwertsatz  $f(E) = E$  ein Intervall.

„ $\Leftarrow$ “: Sei  $E \subseteq \mathbb{R}$  ein Intervall und  $f: E \rightarrow \mathbb{R}$  stetig. Dann ist nach Ana I  $f(E)$  ein Intervall und mit dem Zwischenwertsatz ist damit  $E$  zusammenhängend.

### 7.6.8 Hilfssatz

Seien  $E_\lambda$  für  $\lambda \in \Lambda$  zusammenhängende Mengen (in  $M$ ),  $E_\lambda \cap E_\nu \neq \emptyset$  für je zwei  $\lambda, \nu \in \Lambda$ . Dann ist auch  $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} E_\lambda =: E$  zusammenhängend.

**Beweis:** Annahme:  $E$  ist nicht zusammenhängend,  $(A, B)$  Partition von  $E$ , insbesondere

$$E_\lambda \subseteq A \cup B$$

$$E_\lambda \cap A \cap B \subseteq E \cap A \cap B = \emptyset$$

Da  $E_\lambda$  zusammenhängend ist, ist  $(A, B)$  keine Partition von  $E_\lambda$ . Also ist  $E_\lambda \subseteq A$  oder  $E_\lambda \subseteq B$ . Sei hier  $E_\lambda \subseteq A$ .

Sei  $\mu \neq \lambda$ . Dann ist  $E_\mu \subseteq A$  oder  $E_\mu \subseteq B$  und  $E_\lambda \cap E_\mu \neq \emptyset$ .

Damit ist  $E_\mu \cap A \neq \emptyset$ .

Dann kann  $E_\mu \subseteq B$  nicht gelten, da  $E_\mu \cap A \cap B = \emptyset$  ist, also ist  $E_\mu \subseteq A$ .

Zusammen ist dann  $E \subseteq A$ . Dies ist ein Widerspruch dazu, daß  $(A, B)$  Partition von  $E$  ist, also ist  $E$  zusammenhängend.

### 7.6.9 Beispiel

Sei  $E \subseteq \mathbb{R}^n$  offen und sternförmig bezüglich 0, d. h. für jedes  $x \in E$  gilt:

$$\{tx: 0 \leq t \leq 1\} \subseteq E.$$

Behauptung:  $E$  ist zusammenhängend, also ein Gebiet.

**Beweis:** Sei für  $x \in E$

$$S_x = \{tx : 0 \leq t \leq 1\}.$$

Die Funktion

$$[0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n, t \mapsto tx$$

ist stetig. Damit ist  $S_x$  zusammenhängend. Außerdem ist

$$E = \bigcup_{x \in E} S_x \text{ und } S_x \cap S_y \supseteq \{0\}.$$

Also ist  $E$  zusammenhängend.

### 7.6.10 Satz

Sei  $E \subseteq M$ ,  $E \neq \emptyset$ . Dann ist

$$x \sim y :\Leftrightarrow \text{„es gibt eine zusammenhängende Teilmenge } F \subseteq E \text{ mit } x, y \in F\text{“}$$

eine Äquivalenzrelation. Die Äquivalenzklassen  $[x]$  sind zusammenhängend. Entweder ist  $[x] = [y]$  oder  $[x] \cap [y] = \emptyset$ . Jede Klasse  $[x]$  heißt *Zusammenhangskomponente* von  $E$ . Es gilt:

$$E = \bigcup_x [x]$$

**Beweis:** Zeige, daß  $\sim$  eine Äquivalenzrelation ist:

(1) Reflexivität: Ist  $x \sim x$ ? Ja, da  $x, x \in \{x\}$  = zusammenhängende Teilmenge.

(2) Symmetrie:

$$\begin{aligned} x \sim y &\Rightarrow x, y \in F \subseteq E, F \text{ zusammenhängend} \\ &\Rightarrow y, x \in F \subseteq E, F \text{ zusammenhängend} \\ &\Rightarrow y \sim x \end{aligned}$$

(3) Transitivität:

Sei  $x \sim y$  und  $y \sim z$ , d. h.

$x, y \in F_1 \subseteq E$  und  $y, z \in F_2 \subseteq E$ ,

$F_1$  und  $F_2$  sind zusammenhängend.

$x, z \in F_1 \cup F_2 \subseteq E$

$y \in F_1 \cap F_2$ , also ist  $F_1 \cup F_2$  zusammenhängend.

Also ist  $x \sim z$ .

### 7.6.11 Bemerkung

Zusammenhangskomponenten sind automatisch maximal zusammenhängend, d. h. ist  $F \subseteq E$  zusammenhängend, dann existiert eine Zusammenhangskomponente  $C$  mit  $F \subseteq C$ .

**Beweis:** Sei  $x \in F$ ,  $C = [x]$ .

Für  $y \in F$  ist dann  $x \sim y$ , also  $y \in [x] = C$ ,  $F \subseteq C$ .

**7.6.12 Zusatz**

Ist  $E \subseteq \mathbb{R}^n$  offen [abgeschlossen], dann ist auch jede Zusammenhangskomponente offen [abgeschlossen].

Eine offene Menge  $E \subseteq \mathbb{R}^n$  besteht aus endlich oder abzählbar unendlich vielen Gebieten.

**Beweis:** Zuerst für offenes  $E$ :

Sei  $C$  Zusammenhangskomponente von  $E$ .

Sei  $x \in C$ . Dann existiert ein  $\delta > 0$  mit  $K(x, \delta) \subseteq E$ , da  $K(x, \delta)$  zusammenhängend ist und  $x$  enthält.

Da  $C$  maximal zusammenhängend ist, folgt  $K(x, \delta) \subseteq C$ . Zeige nun, daß es nur endlich oder abzählbar unendlich viele Zusammenhangskomponenten gibt:

Sei  $C$  eine Zusammenhangskomponente von  $E$ .

$C$  enthält  $x \in \mathbb{R}^n$  mit  $x_\nu \in \mathbb{Q}$  für  $\nu = 1, \dots, n$ .

Nenne  $x = x_C$  und definiere die Abbildung

$$\{C: C \text{ ist Komponente von } E\} \rightarrow \mathbb{Q}^n \quad C \mapsto x_C.$$

Diese Abbildung ist injektiv, da je zwei Komponenten disjunkt (oder gleich) sind. Da aber  $\mathbb{Q}^n$  abzählbar ist, existieren höchstens abzählbar viele Komponenten.

Nun der Beweis für abgeschlossenes  $E$ :

Sei  $C$  Zusammenhangskomponente von  $E$ .

Zu zeigen ist, daß  $C$  abgeschlossen ist, d. h.  $C = \bar{C}$ . Es gilt:

- (1)  $\bar{C} \subseteq E$ , da  $E$  abgeschlossen ist.
- (2)  $\bar{C}$  ist zusammenhängend (Dies wird gleich gezeigt).

Zusammen ist also  $C \subseteq \bar{C} \subseteq E$ , also auch  $C = \bar{C}$ .

Zeige nun, daß (2) gilt:

Wenn  $\bar{C}$  nicht zusammenhängend ist, existiert eine Partition  $(A, B)$  von  $\bar{C}$  mit:

- (1)  $A$  und  $B$  sind offen.
- (2)  $\bar{C} \subseteq A \cup B$ .
- (3)  $\bar{C} \cap A \cap B = \emptyset$ .
- (4)  $\bar{C} \cap A \neq \emptyset$  und  $\bar{C} \cap B \neq \emptyset$ .

Da  $C \subseteq A \cup B$  und  $C \cap A \cap B = \emptyset$  und  $C$  zusammenhängend ist, folgt:  $C \cap A = \emptyset$  [oder  $C \cap B = \emptyset$ ], also ist z. B.  $C \subseteq B$ .

Andererseits existiert ein  $a \in \bar{C} \cap A$ . Da  $A \subseteq C$  ist, ist  $a \in C$ ,

d. h. es existiert eine Folge  $(c_n)$  in  $C$  mit  $c_n \rightarrow a$ ,  $c_n \neq a$ .

Also existiert eine Kugel  $K(a, \delta) \subseteq A$ .

Für  $n \geq n_0$  gilt dann:

$$c_n \in K(a, \delta) \subseteq A$$

und

$$c_n \in C \subseteq B.$$

Damit ist dann  $c_n \in C \cap A \cap B = \emptyset$ . Widerspruch!

Also ist  $\bar{C}$  zusammenhängend.

### 7.6.13 Testbeispiel

Sei  $\Lambda$  Indexmenge und  $I_\lambda$  seien für  $\lambda \in \Lambda$  offene Intervalle.

Setze

$$E = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} I_\lambda \subseteq \mathbb{R}.$$

$E$  besteht nach dem Satz aus höchstens Abzählbar vielen Intervallen (Komponenten).

### 7.6.14 Definition: Weg

$M$  sei ein metrischer Raum,  $E \subseteq M$ .

Eine stetige Abbildung

$$\gamma: [\alpha, \beta] \rightarrow E$$

heißt *Weg* in  $E$ .  $\gamma(\alpha)$  heißt *Anfangspunkt*,  $\gamma(\beta)$  heißt *Endpunkt* von  $\gamma$ .

Man sagt  $\gamma$  verbindet  $\gamma(\alpha)$  mit  $\gamma(\beta)$  in  $E$ .

Beachte:

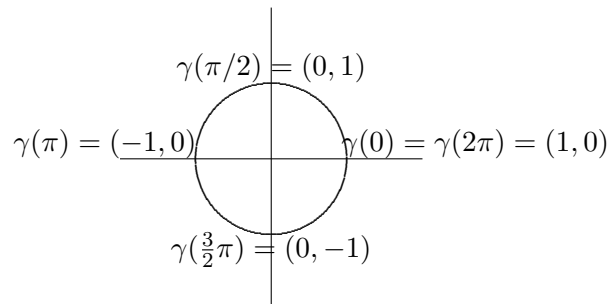
$$|\gamma| := \{\gamma(t) : \alpha \leq t \leq \beta\} \subseteq E$$

ist zusammenhängend,  $|\gamma|$  heißt *Träger* von  $\gamma$ .

### 7.6.15 Beispiel

Sei  $\gamma: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$  mit

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$$



### 7.6.16 Definition: Wegzusammenhang

$E \subseteq M$  heißt *wegzusammenhängend*, wenn es zu  $a, b \in E$  einen Weg  $\gamma$  gibt, der  $a$  mit  $b$  in  $E$  verbindet.

### 7.6.17 Beispiel

Dies gilt zum Beispiel für konvexe und sternförmige Mengen.

### 7.6.18 Satz

Wegzusammenhängende Mengen sind immer zusammenhängend.

**Beweis:** Sei  $E$  wegzusammenhängend und  $a \in E$  fest.

Zu jedem  $x \in E$  existiert ein Weg  $\gamma_x$  in  $E$ , der in  $a$  beginnt und in  $x$  endet,  $|\gamma_x|$  ist zusammenhängend,  $|\gamma_x| \cap |\gamma_y| \supseteq \{a\}$ . Also ist  $E = \bigcup_{x \in E} |\gamma_x|$  zusammenhängend.

**7.6.19 Beispiel/Aufgabe**

Seien

$$E_1 = \left\{ \left( x, \sin \frac{1}{x} \right) : 0 < x \leq 1 \right\}$$

$$E_2 = \{(0, y) : -1 \leq y \leq 1\}$$

Weise nach:  $E_1$  und  $E_2$  sind wegzusammenhängend,  $E_1 \cup E_2$  ist zusammenhängend, aber nicht wegzusammenhängend. Z. B. existiert kein Weg von  $(0, 0)$  zu  $(1, \sin 1)$ .

**7.6.20 Satz**

Jedes Gebiet im  $\mathbb{R}^n$  ist wegzusammenhängend. (Gebiet=offen und wegzusammenhängend)

**Beweis:** Sei  $E \subseteq \mathbb{R}^n$  ein Gebiet und  $a \in E$  sei fest. Setze

$A = \{x \in E : \text{es gibt einen (achsenparallelen) Weg in } E \text{ von } a \text{ nach } x\}$

$B = E \setminus A$ .

1. Zeige:  $A$  ist offen! Sei  $x \in A$ .

Dann existiert ein  $\delta > 0$  mit  $K(x, \delta) \subseteq E$ . Es existiert ein Weg  $\gamma_x$  von  $a$  nach  $x$  mit  $|\gamma_x| \subseteq E$ .

Sei  $y \in K(x, \delta)$ :  $\gamma_x$  verlängert um die Strecke von  $x$  nach  $y$  ist ein Weg von  $a$  nach  $y$  in  $E$ .

D. h.  $y \in A$ , also  $K(x, \delta) \subseteq A$ . Also ist  $A$  offen, da  $x \in A$  beliebig ist.

2.  $A \neq \emptyset$ , da  $a \in A$ .

3. Zeige:  $B$  ist offen!

Es ist  $B = \{x : \text{es existiert kein Weg von } a \text{ nach } x \text{ in } E\}$ .

Sei  $x \in B$ ,  $\delta > 0$ , so daß  $K(x, \delta) \subseteq E$  ist.

Wäre  $y \in K(x, \delta)$  von  $a$  aus erreichbar durch einen Weg  $\gamma_x$ , so auch  $x$  durch  $\gamma_y$ , verlängert um die Strecke von  $y$  nach  $x$ . Also ist  $B$  offen. Daraus folgt

4.  $E = A \cup B$ . Dabei sind  $A$  und  $B$  offen,  $A \cap B = \emptyset$ ,  $A \neq \emptyset$  und  $A \cap B \cap E = \emptyset$ , da  $E$  zusammenhängend ist. Also ist  $B = \emptyset$ , da  $a \in A$  ist.

Gezeigt: Jedes  $x \in E$  ist Endpunkt eines Weges in  $E$ , der in  $a$  beginnt.

Desgleichen gilt auch für achsenparallele Streckenzüge.

**7.7 Gleichgradige Stetigkeit****7.7.1 Definition: gleichgradig stetig**

Sei  $E \subseteq \mathbb{R}^n$ ,  $E \neq \emptyset$ .  $\mathcal{F}$  sei eine Menge (Familie) von Funktionen  $f: E \rightarrow \mathbb{R}^m$ .  $\mathcal{F}$  heißt

(a) *beschränkt*, wenn es ein  $M > 0$  gibt mit  $\|f(x)\| \leq M$  für alle  $x \in E$  und für alle  $f \in \mathcal{F}$ .

(b) *gleichgradig stetig*, wenn es zu jedem  $\varepsilon > 0$  ein  $\delta > 0$  gibt mit: Ist  $x, y \in E$ ,  $\|x - y\| < \delta$ , so ist

$$\|f(x) - f(y)\| < \varepsilon \text{ für alle } f \in \mathcal{F}.$$

## 7.7.2 Beispiele

- (a) Ist für alle
- $f \in \mathcal{F}$
- und
- $x, y \in E$

$$\|f(x) - f(y)\| \leq L\|x - y\|,$$

wobei  $L$  unabhängig von  $f$ ,  $x$  und  $y$  ist, so ist  $\mathcal{F}$  gleichgradig stetig. Setze dabei  $\delta := \frac{\varepsilon}{L}$ .

- (b) Sei
- $E \subseteq \mathbb{R}^n$
- kompakt,
- $f_k: E \rightarrow \mathbb{R}^m$
- stetig und
- $f_k \rightarrow f$
- gleichmäßig in
- $E$
- .

**Behauptung:**  $\mathcal{F} = \{f_k: k \in \mathbb{N}\}$  ist gleichgradig stetig.

**Beweis:** Da alle  $f_k$  gleichmäßig konvergieren, ist  $f$  stetig.

Da aber auch  $E$  kompakt ist, ist  $f$  sogar gleichmäßig stetig.

Also gibt es zu  $\varepsilon > 0$  ein  $\sigma > 0$  mit

$$\|f(x) - f(y)\| < \frac{\varepsilon}{3} \text{ für } x, y \in E, \|x - y\| < \sigma.$$

Weiter existiert ein  $k_0$  mit

$$\|f_k(x) - f(x)\| < \frac{\varepsilon}{3} \text{ für } k \geq k_0, x \in E.$$

Für  $1 \leq k \leq k_0$  existiert ein  $\delta_k$  mit

$$\|f_k(x) - f_k(y)\| < \varepsilon \text{ für } x, y \in E, \|x - y\| < \delta_k.$$

Setze  $\delta := \min(\delta_1, \dots, \delta_{k_0}, \sigma) > 0$ . Für  $\|x - y\| < \delta$  gilt dann:

$$\|f_k(x) - f_k(y)\| < \varepsilon \text{ ist erfüllt für } k \leq k_0.$$

Sei nun  $k \geq k_0$ . Dann ist

$$\begin{aligned} \|f_k(x) - f_k(y)\| &= \|f_k(x) - f(x) + f(x) - f(y) + f(y) - f_k(y)\| \\ &\leq \underbrace{\|f_k(x) - f(x)\|}_{< \varepsilon/3 \text{ glm. Konv.}} + \underbrace{\|f(x) - f(y)\|}_{< \varepsilon/3 \text{ glm. Stetigkeit}} + \underbrace{\|f(y) - f_k(y)\|}_{< \varepsilon/3 \text{ glm. Konv.}} < \varepsilon \end{aligned}$$

Also ist  $\mathcal{F}$  gleichgradig stetig.

Aufgabe: Zeige, daß  $\mathcal{F}$  beschränkt ist.

## 7.7.3 Satz von Arzela-Ascoli

Es sei  $E \subseteq \mathbb{R}^n$  (offen und beschränkt oder der Abschluß einer offenen und beschränkten Menge  $M \subseteq \mathbb{R}^n$ ) und  $\mathcal{F}$  sei beschränkt und gleichgradig stetig.

Dann hat jede Folge  $(f_k)$  in  $\mathcal{F}$  eine gleichmäßig konvergente Teilfolge.

**Beweis:**

- (a) Teilfolgenauswahl nach dem Cantorsche Diagonalverfahren.

$E \cap \mathbb{Q}^n$  ist eine abzählbare Menge, dicht, d. h.  $\overline{E \cap \mathbb{Q}^n} = \bar{E} = \{\xi^1, \xi^2, \xi^3, \dots\}$

1.:  $(f_k(\xi^1))$  ist beschränkt (im  $\mathbb{R}^m$ ): es ex. TF  $(f_{1,k}(\xi^1))$

2.:  $(f_{1,k}(\xi^2))$  ist beschränkt (im  $\mathbb{R}^m$ ): es ex. TF  $(f_{2,k}(\xi^2))$

$\vdots$

$\ell$ .:  $(f_{\ell-1,k}(\xi^\ell))$  ist beschränkt (im  $\mathbb{R}^m$ ): es ex. TF  $(f_{\ell,k}(\xi^\ell))$ . Wir haben also:

$$\begin{array}{ccccccc}
f_{1,1} & f_{1,2} & f_{1,3} & f_{1,4} & \cdots \\
f_{2,1} & f_{2,2} & f_{2,3} & f_{2,4} & \cdots \\
f_{3,1} & f_{3,2} & f_{3,3} & f_{3,4} & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 
\end{array}$$

Wähle nun  $\varphi_k := f_{k,k}$ .

$(\varphi_k)$  ist Teilfolge von  $(f_k)$ .

$(\varphi_k)_{k \geq l}$  ist Teilfolge von  $(f_{\ell,k})$ .

$\varphi_k(\xi^\ell)$  ist Teilfolge von  $(f_{\ell,k}(\xi^\ell))$ ,

d. h.  $\lim_{k \rightarrow \infty} \varphi_k(\xi^\ell)$  existiert für alle  $\ell = 1, 2, \dots$

(b) Konvergenzbeweis:

Sei  $\varepsilon > 0$ . Dazu existiert ein  $\delta > 0$  mit

$$\|\varphi_k(x) - \varphi_k(y)\| < \varepsilon \text{ für } x, y \in E, \|x - y\| < \delta \text{ und für alle } k \in \mathbb{N}$$

(gleichgradige Stetigkeit).

Sei  $D_j = K(\xi^j, \delta)$ :

$$E \subseteq \bar{E} \subseteq \bigcup_{j=1}^{\infty} D_j \text{ (da } \{\xi^j\} \text{ dicht ist).}$$

Da  $\bar{E}$  kompakt ist, gibt es ein  $p$  mit

$$\bar{E} \subseteq D_1 \cup \dots \cup D_p \text{ (Heine-Borel).}$$

Zu  $\varepsilon > 0$  existiert ein Index  $k_0$  mit

$$\begin{aligned}
\|\varphi_k(x) - \varphi_\ell(x)\| &= \|\varphi_k(x) - \varphi_k(\xi^j) + \varphi_k(\xi^j) - \varphi_\ell(\xi^j) + \varphi_\ell(\xi^j) - \varphi_\ell(x)\| \\
&\leq \|\varphi_k(x) - \varphi_k(\xi^j)\| + \|\varphi_k(\xi^j) - \varphi_\ell(\xi^j)\| + \|\varphi_\ell(\xi^j) - \varphi_\ell(x)\| \\
&< \underbrace{\varepsilon}_{(1)} + \underbrace{\varepsilon}_{(2)} + \underbrace{\varepsilon}_{(3)} = 3\varepsilon
\end{aligned}$$

Dabei gilt:

(1), da  $\|x - \xi^j\| < \delta$  für alle  $k$  (gleichgradige Stetigkeit)

(3), da  $\|x - \xi^j\| < \delta$  für alle  $\ell$  (gleichgradige Stetigkeit)

(2), da  $\lim_{k \rightarrow \infty} \varphi_k(\xi^j)$  existiert.

Also ist das Cauchy Kriterium erfüllt, es liegt gleichmäßige Konvergenz vor.

#### 7.7.4 Beispiel: Existenzsatz von Peano

Sei  $S = [a, b] \times \mathbb{R} \subseteq \mathbb{R}^2$  und  $f: S \rightarrow \mathbb{R}$  sei stetig und beschränkt.

Gesucht ist  $u$  mit

$$u' = f(t, u) \text{ und } u(a) = \alpha. \quad (7.3)$$

Das Anfangswertproblem (7.3) hat mindestens eine Lösung in  $[a, b]$ , d. h.

$$u \in C^1([a, b]), \quad u(a) = \alpha \text{ und } u'(t) = f(t, u(t)).$$

Äquivalent zu diesem Problem ist

$$u(t) = \alpha + \int_a^t f(s, u(s)) ds \text{ mit } u \in C([a, b]).$$

**Beweis:** Setze

$$u_n(t) = \alpha \text{ in } [a-1, a]$$

und

$$u_n(t) = \alpha + \int_a^t f\left(s, u_n\left(s - \frac{1}{n}\right)\right) ds \text{ in } (a, b].$$

**Behauptung:**  $\{u_n : n \in \mathbb{N}\}$  ist beschränkt und gleichgradig stetig.

Dann existiert eine Teilfolge  $u_{n_k} \rightarrow u$  gleichmäßig in  $[a, b]$ .

Für  $|u_n(t)| \leq K$  ist  $f$  gleichmäßig stetig auf  $[a, b] \times [-K, K]$

$$f\left(s, u_{n_k}\left(s - \frac{1}{n_k}\right)\right) \xrightarrow{\text{glm.}} f(s, u(s)).$$

$$\begin{array}{ccc} u_{n_k}(t) & = & \alpha + \int_a^t f\left(s, u_{n_k}\left(s - \frac{1}{n_k}\right)\right) ds \\ \downarrow & & \downarrow \\ u(t) & = & \alpha + \int_a^t f(s, u(s)) ds \end{array}$$

**Beweis der Beschränktheit:** Es gilt:  $|f(t, u)| \leq M$  in  $S$ .

$$u_n(t) \leq |\alpha| + \int_a^t M ds \leq |\alpha| + M(b-a) =: K \text{ für } a \leq t \leq b.$$

**Beweis der gleichgradigen Stetigkeit:** Sei  $\tau < t$ . Dann ist

$$\begin{aligned} |u_n(t) - u_n(\tau)| &= \left| \int_a^t f\left(s, u_n\left(s - \frac{1}{n}\right)\right) ds - \int_a^\tau f\left(s, u_n\left(s - \frac{1}{n}\right)\right) ds \right| \\ &= \left| \int_\tau^t \underbrace{f\left(s, u_n\left(s - \frac{1}{n}\right)\right)}_{|\cdot| \leq M} ds \right| \leq M \cdot (t - \tau) \text{ Lipschitzbedingung für } u_n \end{aligned}$$

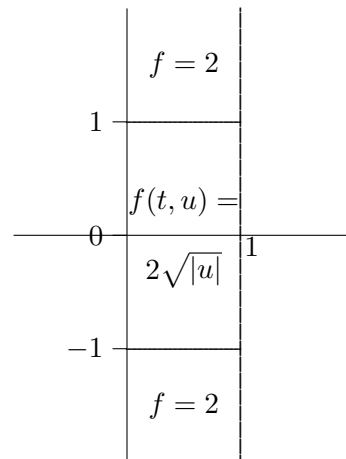
Also sind die  $u_n$  gleichgradig stetig.

### 7.7.5 Beispiel für den Existenzsatz von Peano

Beispiel mit mehreren Lösungen:

Sei  $S = [0, 1] \times \mathbb{R}$  und  $f$  wie folgt definiert:

$$f(t, u) = \begin{cases} 2 & \text{für } u > 1 \\ 2\sqrt{|u|} & \text{für } -1 < u < 1 \\ 2 & \text{für } u < -1 \end{cases}$$



Gesucht ist ein  $u$  mit

$$u' = f(t, u) \text{ und } u(0) = 0.$$

Eine Lösung ist

$$u(t) = 0.$$

Eine andere Lösung ist

$$u(t) = t^2.$$

Die weiteren Lösungen sind

$$u(t) = \begin{cases} 0 & 0 \leq t \leq \tau \\ (t - \tau)^2 & \tau \leq t \leq 1 \end{cases}.$$