9 Kurvenintegrale[1]

9.1 Riemann-Stieltjes Integrale

9.1.1 Feste Bezeichnungen, Riemann-Stieltjes-Summe

$[a,b] \subseteq \mathbb{R}$ ist ein Intervall. $Z = \{t_0, t_1, \ldots, t_m\}$ ist Zerlegung von $[a,b]$ mit $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_m = b$. $\tau = \{\tau_1, \ldots, \tau_m\}$ ist ein passendes Zwischenpunktsystem mit $t_{j-1} \leq \tau_j \leq t_j$, $f, g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ sind Funktionen und

$$\sigma(Z, \tau, f, g) := \sum_{j=1}^{m} f(\tau_j) \cdot [g(t_j) - g(t_{j-1})]$$

ist *Reimann-Stieltjes-Summe* für f, g.

Bemerkung: Für $g(t) = t$ ist die Riemann-Stieltjes-Summe eine Riemannsche Zwischensumme.

9.1.2 Definition: Riemann-Stieltjes-Integral

f heißt integrierbar bezüglich g und

$$A := \int_a^b f\,dg$$

heißt *Riemann-Stieltjes-Integral* von f bezüglich g, wenn gilt:
Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$, so daß

$$|\sigma(Z, \tau, f, g) - A| < \varepsilon$$

für alle Zerlegungen Z mit $|Z| := \max_{j=1}^{m}(t_j - t_{j-1}) < \delta$ und alle Zwischenpunktsysteme τ.

9.1.3 Bemerkung

Für $g(t) = t$ ist das Riemann-Stieltjes-Integral gleich dem Riemann-Integral.

9.1.4 Beispiel

Seien $f, g\colon [-1,1] \to \mathbb{R}$, f stetig in $t = 0$ und

$$g(t) = \begin{cases} \alpha & \text{in } [-1, 0) \\ \beta & \text{in } [0, 1]. \end{cases}$$

Behauptung:

$$\int_{-1}^{1} f\,dg = f(0) \cdot (\beta - \alpha)$$

[1] Version 184 vom 13. Februar 2006

Beweis: Sei Z Zerlegung und τ Zwischenpunktsystem. Wähle j so, daß $t_{j-1} < 0 \leq t_j$. Dann ist

$$\sigma(Z, \tau, f, g) = f(\tau_j) \cdot [g(t_j) - g(t_{j-1})] = [\beta - \alpha] \cdot (f(0) + f(\tau_j) - f(0))$$

Sei $\varepsilon > 0$. Wähle $\delta > 0$ so, daß

$$|f(\tau) - f(0)| < \varepsilon \text{ für } |\tau| < \delta.$$

Für $|Z| < \delta$ gilt dann:

$$|\sigma(Z, \tau, f, g) - (\beta - \alpha) \cdot f(0)| \leq |\beta - \alpha| \cdot \varepsilon.$$

9.1.5 Cauchykriterium

$\int_a^b f\, dg$ existiert genau dann, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt mit

$$|\sigma(Z, \tau, f, g) - \sigma(Z', \tau', f, g)| < \varepsilon \tag{9.1}$$

für alle Z, Z', τ und τ' mit $|Z| < \delta$ und $|Z'| < \delta$.

Beweis:

„$\Rightarrow$“: Wie immer.

„$\Leftarrow$“: Wähle Folgen (Z_n) und $(\tau^{(n)})$ so, daß $|Z_n| \to 0$.
Es ist

$$\sigma_n := \sigma(Z_n, \tau^{(n)}, f, g) \in \mathbb{R}.$$

(σ_n) ist Cauchyfolge in $\mathbb{R}$. Also ist $\sigma_n \to A \in \mathbb{R}$.
Sei $\varepsilon > 0$ und Z beliebig mit $|Z| < \delta$ und ZPS τ.
Aus (9.1) folgt dann für Z und Z_n mit $|Z_n| < \delta$:

$$|\sigma(Z, \tau, f, g) - \sigma(Z_n, \tau^{(n)}, f, g)| < \varepsilon.$$

Für $n \to \infty$ ist dann $|\sigma(Z, \tau, f, g) - A| \leq \varepsilon$, also ist $A = \int_a^b f\, dg$.

9.1.6 Eigenschaften des RS-Integrales

(a) f-Linearität:

$$\int_a^b (\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2)\, dg = \alpha_1 \int_a^b f_1\, dg + \alpha_2 \int_a^b f_2\, dg$$

(b) g-Linearität:

$$\int_a^b f\, d(\alpha_1 g_1 + \alpha_2 g_2) = \alpha_1 \int_a^b f\, dg_1 + \alpha_2 \int_a^b f\, dg_2$$

(c) Existiert

$$\int_a^b f\, dg,$$

so existiert für $[c, d] \subseteq [a, b]$ auch

$$\int_c^d f\, dg.$$

(d) Es gilt:

$$\int_a^b f\,dg = \int_a^c f\,dg + \int_c^b f\,dg.$$

Beweis:

(a) ✓

(b) ✓

(c) Sei $\varepsilon > 0$. Wähle dazu $\delta > 0$ so, daß (9.1) aus dem Cauchykriterium gilt.
Wähle nun eine Zerlegung Z von $[c,d]$ mit ZPS τ und $|Z| < \delta$.
Ergänze nun Z zur Zerlegung $\tilde{Z}$ von $[a,b]$ mit $|\tilde{Z}| < \delta$.
Ergänze entsprechend τ zum ZPS $\tilde{\tau}$ von $[a,b]$.
Wähle nun Z_1 wie Z, $\tau^{(1)}$ wie τ.
Ergänze Z_1 und $\tau^{(1)}$ genauso wie Z und τ zu $\tilde{Z}_1$ und $\tilde{\tau}^{(1)}$. Dann ist

$$|\sigma(Z,\tau,f,g) - \sigma(Z_1,\tau^{(1)},f,g)| = |\sigma(\tilde{Z},\tilde{\tau},f,g) - \sigma(\tilde{Z}_1,\tilde{\tau}^{(1)},f,g)| < \varepsilon,$$

d. h. das Cauchy-Kriterium ist für $[c,d]$ erfüllt.

(d) Aufgabe.

9.1.7 Partielle Integration

Zuerst noch einmal für das Riemann-Integral. Es ist

$$\int_a^b f\cdot g'\,dt = f\cdot g\Big|_a^b - \int_a^b f'\cdot g\,dt.$$

Für das Riemann-Stieltjes-Integral gilt: Existiert $\int_a^b f\,dg$, so existiert auch

$$\int_a^b g\,df = f\cdot g\Big|_a^b - \int_a^b f\,dg.$$

Beweis: Sei Z Zerlegung und τ ein Zwischenpunktsystem.

$$\begin{aligned}
\sigma(Z,\tau,g,f) &= \sum_{j=1}^{m} g(\tau_j)\cdot[f(t_j)-f(t_{j-1})] = \sum_{j=1}^{m} g(\tau_j)f(t_j) - \sum_{j=0}^{m-1} g(\tau_{j+1})f(t_j) \\
&= -\sum_{j=0}^{m} f(t_j)[g(\tau_{j+1})-g(\tau_j)] - g(\tau_0)f(t_0) + g(\tau_{m+1})f(t_m) \\
&= -\sigma(Z',\tau',f,g) + fg\Big|_a^b
\end{aligned}$$

Dabei ist $\tau_0 = t_0$ und $\tau_{m+1} = t_m$.
Damit ist $Z' = \{\tau_0,\ldots,\tau_{m+1}\}$ Zerlegung und $\tau' = \{t_0,\ldots,t_m\}$ ZPS.
Sei $\varepsilon > 0$. Wähle $\delta > 0$ so, daß

$$\left|\sigma(\tilde{Z},\tilde{\tau},f,g) - \int_a^b f\,dg\right| < \varepsilon$$

für alle $\tilde{Z}$ mit $|\tilde{Z}| < \delta$ und alle $\tilde{\tau}$ ist.
Sei nun $|Z| < \frac{\delta}{2}$. Dann ist $|Z'| < 2 \cdot \frac{\delta}{2} = \delta$ und damit ist

$$\left| \sigma(Z', \tau', f, g) - \int_a^b f\, dg \right| < \varepsilon,$$

also ist für $|Z| < \frac{\delta}{2}$

$$\left| \sigma(Z, \tau, g, f) - fg \Big|_a^b + \int_a^b f\, dg \right| < \varepsilon.$$

Daraus folgt die Behauptung.

9.1.8 Zusammenhang zwischen RS- und R-Integralen

Sind f und g' Riemann-integrierbar, dann ist

$$\int_a^b f\, dg = \int_a^b f(t) \cdot g'(t)\, dt.$$

Beweis: Sei Z Zerlegung mit Zwischenpunktsystem τ. Dann ist

$$\begin{aligned}
\sigma(Z, \tau, f, g) &= \sum_{j=1}^{m} f(\tau_j) \cdot [\underbrace{g(t_j) - g(t_{j-1})}_{\substack{\text{MWS:} \\ =(t_j - t_{j-1}) g'(\tilde{\tau}_j)}}] \\
&= \sum_{j=1}^{m} f(\tau_j) g'(\tau_j)(t_j - t_{j-1}) \\
&\quad + \sum_{j=1}^{m} f(\tau_j)(g'(\tilde{\tau}_j) - g'(\tau_j))(t_j - t_{j-1}) \\
&\quad = \sigma(Z, \tau, f \cdot g') + \tilde{\sigma}
\end{aligned}$$

Sei $\varepsilon > 0$ und $\delta > 0$ so, daß

1. $|\sigma(Z, \tau, f \cdot g') - \int_a^b f(t) g'(t)\, dt| < \varepsilon$ für $|Z| < \delta$ und alle τ.
2. $|S(Z, g') - s(Z, g')| < \varepsilon$ für $|Z| < \delta$.

f ist beschränkt, d. h. $|f| < M$.

$$\begin{aligned}
\left| \sigma(Z, \tau, f, g) - \int_a^b f(t) g'(t)\, dt \right| &\le \underbrace{\left| \sigma(Z, \tau, f g') - \int_a^b f g'\, dt \right|}_{< \varepsilon,\, |Z| < \delta} + |\tilde{\sigma}| \\
&< \varepsilon + \sum_{j=1}^{m} M \cdot \left[\sup_{t_{j-1} \le \tau \le t_j} g'(\tau) - \inf_{t_{j-1} \le \tau \le t_j} g'(\tau) \right] \cdot (t_j - t_{j-1}) \\
&< \varepsilon + M \cdot \varepsilon \text{ für } |Z| < \delta, \text{ alle } \tau.
\end{aligned}$$

9.1.9 Satz: Existenz des RS-Integrales

Ist $f \in C([a,b])$ und ist g monoton, dann existiert $\int\limits_a^b f\,dg$.

Beweis: Für monoton wachsendes g.
Sei $\varepsilon > 0$.

1. Dazu existiert ein $\delta > 0$ mit
$$|f(s) - f(t)| < \varepsilon$$
für $x, t \in [a,b]$, $|s-t| < \delta$ (gleichmäßige Stetigkeit).

2. Sind Z und Z' Zerlegungen mit $Z \subseteq Z'$ und $|Z| < \delta$, so gilt:
$$|\sigma(Z,\tau,f,g) - \sigma(Z',\tau',f,g)| \leq \varepsilon(g(b) - g(a)).$$
Beweis:
Berechne die Beiträge von $[t_{\mu-1}, t_\mu]$ zu den $\sigma(Z,\dots)$ und
berechne die Beiträge von $[t_{\mu-1}, t_\mu]$ zu den $\sigma(Z',\dots)$:
$$\begin{aligned} Z: &\quad f(\tau_\mu)\cdot[g(t_\mu) - f(t_\mu - 1)] = \sum_{j=\nu+1}^{\nu+k} f(\tau_\mu)\cdot[g(t'_j) - g(t'_{j-1}] \\ Z': &\quad \sum_{j=\nu+1}^{\nu+k} f(\tau'_j)\cdot[g(t'_j) - g(t'_{j-1})] \end{aligned}$$
Dann ist für $|\tau_\mu - \tau'_j| < \delta$:
$$\begin{aligned} |\sigma(Z,\tau,f,g) - \sigma(Z',\tau',f,g)| &< \varepsilon \sum_{j=1}^{m'} \underbrace{(g(t'_j) - g(t'_{j-1}))}_{\geq 0} \\ &= \varepsilon\cdot(g(b) - g(a)) \end{aligned}$$

3. Seien nun Z' und Z'' beliebige Zerlegungen mit $|Z'| < \delta$, $|Z''| < \delta$ und Zwischenpunktsystemen τ' und τ.
Setze $Z = Z' \cup Z''$ und $\tau = \tau' \cup \tau''$.
Dann ist $|Z| < \delta$ und
$$\begin{aligned} |\sigma(Z',\tau',f,g) - \sigma(Z'',\tau'',f,g)| &\leq |\sigma(Z') - \sigma(Z)| + |\sigma(Z) - \sigma(Z'')| \\ &\leq 2\varepsilon(g(b) - g(a)) \end{aligned}$$
Das Cauchykriterium ist also erfüllt, d. h. das Integral $\int\limits_a^b f\,dg$ existiert.

9.2 Funktionen von endlicher Variation

9.2.1 Definition: Variation

Sei $g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$. Ist $Z = \{t_0, t_1, \dots, t_m\}$ eine Zerlegung von $[a,b]$, so setzt man
$$\operatorname{var}(Z,g) := \sum_{j=1}^{m} |g(t_j) - g(t_{j-1})|$$

und
$$V_a^b(g) := \sup\{\mathrm{var}(Z,g)\colon Z \text{ ist Zerlegung von } [a,b]\}.$$
$V_a^b(g)$ heißt (Total-)Variation von g. Ist $V_a^b(g) < \infty$, so heißt g von *endlicher (beschränkter) Variation.*

9.2.2 Beispiele

(1) Sei g monoton ($\oplus$). Dann ist
$$\begin{aligned}
\mathrm{var}(Z,g) &= \sum_{j=1}^{m} |g(t_j) - g(t_{j-1})| \\
&\overset{\oplus}{=} \left| \sum_{j=1}^{m} g(t_j) - g(t_{j-1}) \right| \\
&= |g(b) - g(a)| \\
\Rightarrow V_a^b(g) &= |g(b) - g(a)|.
\end{aligned}$$

(2) Sei $g' \in R([a,b])$. Dann ist
$$\begin{aligned}
\mathrm{var}(Z,g) &= \sum_{j=1}^{m} |\underbrace{g(t_j) - g(t_{j-1})}_{=(t_j - t_{j-1})g'(\tau_j)}| \\
&\leq S(Z,g') \text{ Obersumme} \\
&\geq s(Z,g') \text{ Untersumme}
\end{aligned}$$
$$\Rightarrow V_a^b(g) = \int_a^b |g'(t)|\,dt.$$

(3) Sei
$$g(t) = \begin{cases} t\cos\frac{\pi}{t} & \text{für } 0 < t \leq 1 \\ 0 & \text{für } t = 0 \end{cases}$$
in $[a,b] = [0,1]$. g ist stetig, aber nicht von endlicher Variation.
Wähle folgende Zerlegung Z für $m \in \mathbb{N}$:
$$Z := \left\{0, \frac{1}{m}, \ldots, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1\right\}.$$
Dann ist
$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{m} |g(t_j) - g(t_{j-1})| &= \left|\frac{1}{m}\cos(\pi m)\right| + \sum_{j=2}^{m} \frac{1}{j} + \frac{1}{j-1} \\
&> \sum_{j=1}^{m} \frac{1}{j} \\
&\to \infty \text{ für } m \to \infty.
\end{aligned}$$

(4) Aufgabe: Zeige, daß
$$g(t) = \begin{cases} t^2\cos\frac{\pi}{t} & \text{für } 0 < t \leq 1 \\ 0 & \text{für } t = 0 \end{cases}$$
von endlicher Variation ist.

9.2.3 Satz

Ist g von endlicher Variation, so ist

$$v(t) = \begin{cases} V_a^t(g) & \text{für } a < t \leq b \\ 0 & \text{für } t = 0 \end{cases}$$

monoton wachsend und dort stetig, wo g stetig ist.

Beweis: Sei $a \leq c < b$. Dann gilt:

$$V_a^b = V_a^c + V_c^b$$

Beweis hierfür:
Seien Z' und Z'' Zerlegungen von $[a, c]$ bzw. $[c, b]$, $Z = Z' \cup Z''$. Es ist dann:

$$V_a^b(g) \geq \operatorname{var}(Z, g) = \operatorname{var}(Z', g\big|_{[a,c]}) + \operatorname{var}(Z'', g\big|_{[c,b]}.$$

Also ist $V_a^b \geq V_a^c + \operatorname{var}(Z'', g\big|_{[c,b]})$ und auch $V_a^b \geq V_a^c + V_c^b$.
Nun die Umkehrung: Z sei Zerlegung von $[a, b]$, $Z_c = Z \cup \{c\}$.
Damit ist ($\oplus$ als Aufgabe):

$$\begin{aligned} \operatorname{var}(Z, g) &\overset{\oplus}{\leq} \operatorname{var}(Z_c, g) \\ &= \operatorname{var}(Z', g\big|_{[a,c]}) + \operatorname{var}(Z'', g\big|_{[c,b]}) \end{aligned}$$

mit $Z' = Z_C \cap [a, b]$ und $Z'' = Z_C \cap [c, b]$.
Also ist $\operatorname{var}(Z, g) \leq V_a^c(g) + V_c^b(g)$ und damit $V_a^b \leq V_a^c + V_c^b$.
Zusammen ergibt sich die Behauptung.

Monotonie von v: Sei $a \leq s < t \leq b$. Dann ist

$$v(t) = v(s) + \underbrace{V_s^t(g)}_{\geq 0} \geq v(s).$$

Stetigkeit von v: Sei $\varepsilon > 0$. Dann existiert eine Zerlegung Z von $[a, b]$ mit

$$\operatorname{var}(Z, g) > V_a^b(g) - \varepsilon.$$

Sei nun $a < c < d < b$. Setze dann

$$\begin{aligned} \tilde{Z} &= (Z \cap [c, d]) \cup \{c, d\} \\ Z_1 &= (Z \cap [a, c]) \cup \{c\} \\ Z_2 &= (Z \cap [d, b]) \cup \{d\}. \end{aligned}$$

Dann ist

$$\operatorname{var}(\tilde{Z}, g\big|_{[c,d]}) > V_c^d(g) - \varepsilon,$$

denn es ist

$$\begin{aligned} V_a^b(g) &< \operatorname{var}(Z, g) + \varepsilon \\ &= \operatorname{var}(Z_1, g) + \operatorname{var}(\tilde{Z}, g) + \operatorname{var}(Z_2, g) + \varepsilon \\ &< V_a^c(g) + \operatorname{var}(\tilde{Z}, g) + V_a^b(g) + \varepsilon \end{aligned}$$

Also ist $V_c^d(g) < \operatorname{var}(\tilde{Z}, g) + \varepsilon$.
Zeige nun: Wenn g in $\tau \in [a,b]$ stetig ist, so ist v rechtsseitig stetig in τ.
(Zeige dann genauso, daß v auch linksseitig stetig ist).
Sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Wähle Z mit

$$\operatorname{var}(Z, g) > V_a^b(g) - \varepsilon.$$

Wähle $\delta > 0$ so, daß $(\tau, \tau + \delta)$ keinen Teilpunkt von Z enthält.
$\{\tau, t\}$ ist Zerlegung von $[\tau, t]$. Es ist

$$\begin{aligned} |g(t) - g(\tau)| &> V_\tau^t(g) - \varepsilon \\ &= v(t) - v(\tau) - \varepsilon. \end{aligned}$$

Damit ist dann

$$\begin{aligned} 0 &\leq v(t) - v(\tau) \\ &< \underbrace{|g(t) - g(\tau)|}_{<\varepsilon \text{ für } |t-\tau|<\delta'} + \varepsilon. \end{aligned}$$

Also ist

$$|v(t) - v(\tau)| < 2\varepsilon$$

für $\tau < t < \min(\tau + \delta, \tau + \delta')$.
Das heißt, daß v stetig ist.

9.2.4 Zerlegungssatz

g ist genau dann von endlicher Variation, wenn es eine Darstellung

$$g = g_1 - g_2$$

mit monoton wachsenden Funktionen g_1 und g_2 gibt.
Es gilt dann:

$$V_a^b(g) \leq V_a^b(g_1) + V_a^b(g_2).$$

Beweis:

„$\Leftarrow$“: Setze $g = g_1 - g_2$. Dann ist

$$\begin{aligned} \operatorname{var}(Z, g) &\leq \sum_{j=1}^{m} |g_1(t_j) - g_1(t_{j-1})| + |g_2(t_j) - g_2(t_{j-1})| \\ &\leq \operatorname{var}(Z, g_1) + \operatorname{var}(Z, g_2) \\ &\leq V_a^b(g_1) + V_a^b(g_2) \end{aligned}$$

Daraus folgt dann die Behauptung.

„$\Rightarrow$“: Konstruiere g_1 und g_2 wachsend mit $g = g_1 - g_2$ und

$$V_a^b(g) = V_a^b(g_1) + V_a^b(g_2).$$

Es wird definiert:

$$v_\pm(t) := \sup\left\{ \sum_{j=1}^{m} (g(t_j) - g(t_{j-1}))^\pm \colon \{t_0, \ldots, t_n\} \text{ bel. Zerl. von } [a,b] \right\}$$

sind die positive bzw. negative Variation.
Es gelten:

(1) $v_+(t) + v_-(t) = V_a^t(g)$

(2) $v_+(t) - v_-(t) = g(t) - g(a)$, denn es ist

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{m}(g(t_j) - g_(t_{j-1}))^+ - \sum_{j=1}^{m}(g(t_j) - g(t_{j-1}))^- \\ = \sum_{j=1}^{m}(g(t_j) - g(t_{j-1})) \\ = g(b) - g(a). \end{aligned}$$

Es gilt dann:

$$g(t) = \underbrace{(g(a) + v_+(t))}_{:=g_1} - \underbrace{v_-(t)}_{=:g_2}$$

g_1 und g_2 sind monoton wachsend wie V_a^t.
Es ist:

$$V_a^b(g_1) = v_+(b)$$
$$V_a^b(g_2) = v_-(b).$$

Nach Addition gilt:

$$V_a^b(g_1) + V_a^b(g_2) = v_+(b) + v_-(b) = V_a^b(g).$$

9.2.5 Satz

Ist f stetig auf $[a, b]$ und g von endlicher Variation, so existiert $\int_a^b f\,dg$, und es ist

$$\left|\int_a^b f\,dg\right| \leq \|f\|_\infty \cdot V_a^b(g).$$

Beweis:

Existenz: Es ist $g = g_1 - g_2$ mit monoton wachsenden g_1 und g_2. Dann existieren

$$\int_a^b f\,dg_j \text{ für } j = 1, 2.$$

Also existiert auch

$$\int_a^b f\,dg = \int_a^b f\,dg_1 - \int_a^b f\,dg_2.$$

Abschätzung: Es ist

$$\begin{aligned} |\sigma(Z, \tau, f, g)| &= \left|\sum_{j=1}^{m} f(\tau_j)(g(t_j) - g(t_{j-1}))\right| \\ &\leq \|f\|_\infty \cdot \operatorname{var}(Z, g) \leq \|f\|_\infty \cdot V_a^b(g). \end{aligned}$$

Also ist auch

$$\left|\int_a^b f\,dg\right| \leq \|f\|_\infty \cdot V_a^b(g).$$

9.2.6 Folgerung aus dem Zerlegungssatz

Man kann g_1 und g_2 so wählen, daß sie überall dort stetig sind, wo auch g stetig ist. Ist insbesondere $g \in C([a,b])$, so kann man $g_1, g_2 \in C([a,b])$ wählen.

Beweis: Wie bei $v(t)$ zeige:
v_+ und f_- sind dort stetig, wo auch g stetig ist. Setze dann $g_1 = v_+ + g(a)$ und $g_2 = v_-$.

9.2.7 Mittelwertsatz

Sei $f\colon [a,b] \to [m,M]$ und $g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ sei monoton. Außerdem existiere $\int_a^b f\,dg$.

(a) Dann existiert ein $\mu \in [m,M]$ mit

$$\int_a^b f\,dg = \mu \cdot (g(b) - g(a)).$$

(b) Ist $f \in C([a,b])$, so gibt es ein $\xi \in (a,b)$ mit

$$\int_a^b f\,dg = f(\xi) \cdot (g(b) - g(a)).$$

Beweis: Als Aufgabe (Riemann-Integral: $g(t) = t$).

9.2.8 Beispiel zum RS-Integral

Sei $f\colon (0,\infty) \to (0,\infty)$, stetig differenzierbar mit $f \to 0$ für $t \to \infty$.
Dann ist

$$\begin{aligned}
L &= \int_\delta^T f(t)\,d(\underbrace{t - [t] - \frac{1}{2}}_{\substack{=g(t)\\ \text{endliche Variation}}}) \\
&= f(t) \cdot g(t)\Big|_\delta^T - \int_\delta^T f'(t) \cdot \left(t - [t] - \frac{1}{2}\right)\,dt \\
L &= \int_\delta^T f(t)\,dt - \int_\delta^T f(t)\,d\left([t] - \frac{1}{2}\right) \\
&= \int_\delta^T f(t)\,dt - \sum_{k=1}^{[T]} f(k).
\end{aligned}$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{[T]} f(k) &= \int_\delta^T f(t)\,dt + f(T)g(T) - f(\delta)g(\delta) - \int_\delta^T f'(t)\left(t - [t] - \frac{1}{2}\right)\,dt \\
&\xrightarrow{\delta \to 1} \int_1^T f(t)\,dt - \int_1^T f'(t)\left(t - [t] - \frac{1}{2}\right)\,dt + f(T)g(T) - \frac{1}{2}f(1).
\end{aligned}$$

Für $T \to \infty$ gilt dann:

$$\sum_{k=1}^{\infty} f(k) = \int_1^{\infty} f(t)\,dt - \frac{1}{2}f(1) + \int_1^{\infty} f'(t)\left(t - [t] - \frac{1}{2}\right)\,dt,$$

falls $\int_1^{\infty} f(t)\,dt$ existiert. Also ist

$$\sum_{k=1}^{\infty} f(k) = \int_1^{\infty} f(t)\,dt - \frac{1}{2}f(1) - R$$

mit

$$\begin{aligned} |R| &= \left| \int_1^{\infty} f'(t)\left(t - [t] - \frac{1}{2}\right)\,dt \right| \\ &\le \frac{1}{2}\int_1^{\infty} |f'(t)|\,dt. \end{aligned}$$

9.3 Wege und Weglängen

9.3.1 Definition: Weg

Eine stetige Abbildung $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ heißt *Weg.* $\gamma(a)$ ist der *Anfangspunkt* und $\gamma(b)$ ist der Endpunkt.

$$|\gamma| := \{\gamma(t)\colon a \le t \le b\}$$

ist der *Träger* von γ.

9.3.2 Definition: rektifizierbarer Weg, Länge

Ein Weg γ heißt *rektifizierbar*, wenn

$$L(\gamma) = \sup\left\{ \sum_{j=1}^{m} \|\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})\|\colon \{t_0 < t_1 < \cdots < t_m\} \text{ bel. Zerl. von } [a,b] \right\}$$

endlich ist. $L(\gamma)$ heißt *Länge* von γ.

9.3.3 Satz

γ ist genau dann rektifizierbar, wenn die $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$ von endlicher Variation sind.

Beweis: Sei $Z = \{t_0, \ldots, t_m\}$ Zerlegung.

$$\sum_{j=1}^{m} |\gamma_\varrho(t_j) - \gamma_\varrho(t_{j-1})| \le \sum_{j=1}^{m} \|\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})\| \le \sum_{j=1}^{m}\sum_{\nu=1}^{n} |\gamma_\nu(t_j) - \gamma_\nu(t_{j-1})|$$

für $\varrho = 1, \ldots, n$.
Es gilt dann:

$$\operatorname{var}(Z, \gamma_\varrho) \le \sum_{j=1}^{m} \|\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})\| \le \sum_{\nu=1}^{n} \operatorname{var}(Z, \gamma_\nu)$$

für $\varrho = 1, \ldots, n$. Also ist

$$V_a^b(\gamma_\varrho) \leq L(\gamma) \leq \sum_{\nu=1}^{n} V_a^b(\gamma_\nu).$$

9.3.4 Satz

(a) Ist γ rektifizierbar, so ist die *Bogenlänge*

$$s(t) := L(\gamma\big|_{[a,t]})$$

stetig und monoton wachsend und

$$L(\gamma) = \int_a^b 1\, ds \text{ (Riemann-Stieltjes-Integral).}$$

(b) Ist γ stetig differenzierbar, so gilt

$$s(t) = \int_a^t \|\gamma'(\tau)\|\, d\tau.$$

Insbesondere ist

$$L(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(\tau)\|\, d\tau.$$

Beweis:

(a) Sei $a \leq t' < t \leq b$. Dann ist

$$s(t) - s(t') = L(\gamma\big|_{[t',t]}) \geq 0 \;\Rightarrow\; s \nearrow$$

$$0 \leq s(t) - s(t') \leq \sum_{\nu=1}^{n} V_{t'}^{t}(\gamma_\nu) \to 0 \text{ für } t - t' \to 0.$$

(b) Ist γ' stetig, so sind $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ von endlicher Variation, d. h. γ ist rektifizierbar. Sei nun $a \leq t' < t \leq b$:

(a) $s(t) - s(t') \geq \|\gamma(t) - \gamma(t')\|$.
Sei Z Zerlegung von $[t', t]$, $Z = \{t_0, \ldots, t_m\}$.

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{m} \|\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})\| &= \sum_{j=1}^{m} \left\| \int_{t_{j-1}}^{t_j} \gamma'(\tau)\, d\tau \right\| \\ &\leq \sum_{j=1}^{m} \int_{t_{j-1}}^{t_j} \|\gamma'(\tau)\|\, d\tau \\ &= \int_{t'}^{t} \|\gamma'(\tau)\|\, d\tau.\end{aligned}$$

(b) $s(t) - s(t') \leq \int\limits_{t'}^{t} \|\gamma'(\tau)\|\, d\tau.$

Also ist

$$\left\| \frac{\gamma(t) - \gamma(t')}{t - t'} \right\| \leq \frac{s(t) - s(t')}{t - t'} < \frac{1}{t - t'} \int\limits_{t'}^{t} \|\gamma'(\tau)\|\, d\tau.$$

Für $t' \to t$ gilt dann:

$$\|\gamma'(t)\| \leq s'(t) \leq \|\gamma'(t)\|$$

$$\Rightarrow s'(t) = \|\gamma'(t)\|, \text{ also } s \in C^1([a, b]).$$

Deshalb gilt:

$$s(t) = \int\limits_{a}^{t} \|\gamma'(\tau)\|\, d\tau$$

und

$$L(\gamma) = s(b) = \int\limits_{a}^{b} \|\gamma'(\tau)\|, d\tau.$$

9.3.5 Beispiele

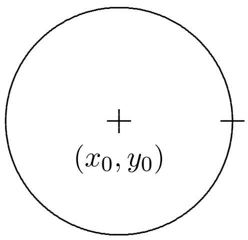
(1) Kreislinie im $\mathbb{R}^2$:

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} x_0 + r\cos t \\ y_0 + r \sin t \end{pmatrix} \text{ für } 0 \leq t \leq 2\pi$$

$$\gamma' = \begin{pmatrix} -r \sin t \\ r \cos t \end{pmatrix}$$

$$\|\gamma'\| = r$$

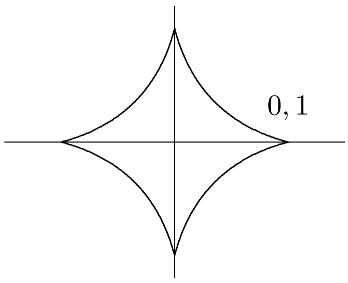
$$L = \int\limits_{0}^{2\pi} r\, dt = 2\pi r$$



(2) Asteroide im $\mathbb{R}^2$:

Es ist für $0 \leq t \leq 2\pi$

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} \cos^3 t \\ \sin^3 t \end{pmatrix}$$



$$\|\gamma'\|^2 = (3\cos^2(t) \cdot \sin(t))^2 + (3 \sin^2(t) \cdot \cos t)^2 = 9 \cos^2 t \sin^2 t$$

$$\|\gamma'(t)\| = 3|\cos t \sin t| = \frac{3}{2}|\sin 2t| = s'(t)$$

$$L(\gamma) = 4 \cdot \frac{3}{2} \int\limits_{0}^{pi/2} \sin 2\tau\, d\tau = \frac{6}{2}(-\cos 2\tau)\Big|_{a}^{\pi/2} = 6$$

(3) Schraubenlinie im $\mathbb{R}^3$:

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} r\cos t \\ r\sin t \\ ht \end{pmatrix}, \text{ mit } r > 0,\ h > 0,\ 0 \le t \le \alpha$$
$$\|\gamma'\| = \sqrt{r^2 + h^2}$$
$$L(\gamma) = \sqrt{r^2 + h^2} \cdot \alpha$$

(4) Zykloide im $\mathbb{R}^2$:

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} t - \sin t \\ 1 - \cos t \end{pmatrix} \text{ für } 0 \le t \le 2\pi$$
$$\|\gamma'\|^2 = (1-\cos t)^2 + \sin^2 t = 1 - 2\cos t + 1 = 2(1-\cos t) = 4\sin^2 \frac{t}{2}$$

Also ist

$$\|\gamma'\| = 2\sin\frac{t}{2} \text{ für } 0 \le t \le 2\pi$$
$$L(\gamma) = 2 \cdot (2\left(-\cos\frac{t}{2}\right)\Big|_0^{2\pi} = 8$$

9.3.6 Definition: Äquivalenz von 2 Wegen

Zwei Wege $\alpha\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ und $\beta\colon [c,d] \to \mathbb{R}^n$ heißen äquivalent, wenn es eine stetige, monoton wachsende Bijektion $h\colon [a,b] \to [c,d]$ mit $\alpha(t) = \beta(h(t))$, $a \le t \le b$ gibt. Kurz: $\alpha \sim \beta$.

9.3.7 Beispiel

$$\alpha\colon [-1,1] \to \mathbb{R}^2 \qquad \alpha(t) = \begin{pmatrix} t \\ |t| \end{pmatrix}$$
$$\beta\colon [-1,1] \to \mathbb{R}^2 \qquad \beta(t) = \begin{pmatrix} t \cdot |t| \\ t^2 \end{pmatrix}.$$

α und β haben den gleichen Träger, gleichen Anfangs- und Endpunkt und die gleiche Länge. Setze hier

$$h(t) = \begin{cases} -\sqrt{|t|} & -1 \le t \le 0 \\ \sqrt{t} & 0 \le t \le 1 \end{cases}.$$

9.3.8 Satz und Definition: Kurve, Parameterdarstellung

$\sim$ ist eine Äquivalenzrelation. Jede Äquivalenzklasse heißt *Kurve*. Jeder Weg α einer Äquivalenzklasse heißt *Parameterdarstellung*. h heißt auch *Parameterwechsel*.

Beweis: Aufgabe.

9.3.9 Satz: Eigenschaften äquivalenter Wege

Äquivalente Wege haben

(a) denselben Anfangspunkt

(b) denselben Endpunkt

(c) denselben Träger

(d) dieselbe Länge

Beweis:

(a) Aufgabe

(b) Aufgabe

(c) Aufgabe

(d) Sei $\alpha\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ und $\beta\colon [c,d] \to \mathbb{R}^n$ mit $\alpha(t) = \beta(h(t))$.
$Z = \{t_0, \dots, t_n\}$ sei beliebige Zerlegung von $[a,b]$.
Setze $\tau_j = h(t_j)$.
Dann ist $Z' = (\tau_0, \dots, \tau_m)$ Zerlegung von $[c,d]$.

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{m} \|\alpha(t_j) - \alpha(t_{j-1})\| &= \sum_{j=1}^{m} \|\beta(\tau_j) - \beta(\tau_{j-1})\| \\ &\leq L(\beta)\end{aligned}$$

Also ist $L(\alpha) \leq L(\beta)$, da Z beliebig gewählt wurde.
Umgekehrt gilt auch $L(\beta) \leq L(\alpha)$. Benutze dafür h^{-1}.

9.3.10 Umorientierung von Wegen

Sei $\alpha\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$. Dann ist $\gamma := -\alpha$ der Weg

$$\gamma(t) = \alpha(-t) \text{ für } -b \leq t \leq -a.$$

Aufgabe: Zeige: $\alpha \sim \beta \;\Rightarrow\; -\alpha \sim -\beta$.

9.3.11 Aneinanderhängen von Wegen

Seien $\alpha\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ und $\beta\colon [c,d] \to \mathbb{R}^n$ Wege mit $\alpha(b) = \beta(c)$. Dann ist der Weg $\gamma := \alpha + \beta$ folgendermaßen erklärt:

$$\gamma(t) = \begin{cases} \alpha(t) & a \leq t \leq b \\ \beta(c + t - b) & b \leq t \leq b + d - c \end{cases}.$$

Aufgabe: Zeige: $\alpha \sim \alpha_1$, $\beta \sim \beta_1 \;\Rightarrow\; \alpha + \beta \sim \alpha_1 + \beta_1$.

9.3.12 Definition: Jordanweg/-bogen

Ist $\alpha\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ injektiv, so heißt α *Jordanbogen*. Umgangssprachlich gesagt: Es treten keine Schnittpunkte auf.

9.3.13 Satz: Äquivalenz von Jordanbögen

Sind α und β Jordanbögen mit $|\alpha| = |\beta|$ und gleichem Anfangspunkt, so sind α und β äquivalent.

Beweis: $|\alpha| = |\beta| \subseteq \mathbb{R}^n$ ist kompakt.
$\beta\colon [c,d] \to |\beta|$ ist stetig, bijektiv.
Damit ist $\beta^{-1}\colon |\beta| \to [c,d]$ stetig und bijektiv.
$h(t) = \beta^{-1}(\alpha(t))$ ist stetig, bijektiv: $[a,b] \to [c,d]$.
h ist insbesondere monoton. h ist sogar monoton wachsend,
da $h(a) = \beta^{-1}(\alpha(a)) = c$ und $h(b) = \beta^{-1}(\alpha(b)) = d$ und $\alpha(t) = \beta(h(t))$
Daraus folgt die Äquivalenz.

9.3.14 Definition: geschlossene Kurve, Jordankurve

$\alpha\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ heißt *geschlossen*, wenn $\alpha(a) = \alpha(b)$ ist. Ein geschlossener Weg heißt *Jordankurve*, wenn $\alpha\colon [a,b) \to \mathbb{R}^n$ injektiv ist, aber $\alpha(a) = \alpha(b)$ ist.

9.3.15 Jordanscher Kurvensatz

Ist γ eine Jordankurve im $\mathbb{R}^2$, so besteht $\mathbb{R}^2 \setminus |\gamma|$ aus zwei Gebieten G_i (innen) und G_a (außen). Dabei ist $G_i \cap G_a = \emptyset$ und $\partial G_i = \partial G_a = |\gamma|$.

Ohne Beweis.

9.3.16 Tangente an eine Kurve

Sei $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ ein Weg, $\gamma'(t_0)$ existiere und sei ungleich 0. Dann ist

$$\gamma(t) = \gamma(t_0) + \gamma'(t_0)(t - t_0) + o(|t - t_0|)$$

und

$$\tau \mapsto \gamma(t_0) + \gamma'(t_0)\tau \text{ für } \tau \in \mathbb{R}$$

ist die Parameterdarstellung einer Geraden, der Tangente von γ im Punkt $\gamma(t_0)$.

9.3.17 Definition: C^1-Kurve, glatte Kurve

$\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ heißt C^1 bzw. glatt, wenn $\gamma \in C^1([a,b])$ bzw. wenn $\gamma \in C^1([a,b])$ und überall $\gamma'(t) \neq 0$ ist.

9.3.18 Beispiel

$\gamma(t) = \begin{pmatrix} t|t| \\ t^2 \end{pmatrix}$ für $-1 \leq t \leq 1$.
γ ist ein C^1-Weg, aber nicht glatt, da $\gamma'(0) = 0$ ist.

9.3.19 Definition: stückweise C^1/glatt

γ heißt stückweise C^1 bzw. stückweise glatt, wenn es endlich viele C^1-Wege bzw. glatte Wege $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ gibt mit $\gamma = \gamma_1 + \cdots + \gamma_m$.

9.3.20 Satz

Sei $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ rektifizierbar und γ sei auf keinem Teilintervall konstant. Dann ist $s(t) = L(\gamma_{[a,t]})$ streng monoton wachsend.

Beweis: Zeige: $s(t) < s(t')$ für $t < t'$:
Es ex. $t'' \in (t,t')$ mit $\gamma(t'') \neq \gamma(t)$ oder $\gamma(t'') \neq \gamma(t')$:

$$s(t') - s(t) \geq \|\gamma(t) - \gamma(t'')\| + \|\gamma(t'') - \gamma(t')\| > 0.$$

Beachte: $s\colon [a,b] \to [0, L(\gamma)]$ ist eine Bijektion, stetig und streng wachsend.
Die Umkehrfunktion $[0, L(\gamma)] \to [a,b]$ heiße $t = t(s)$.

9.3.21 Parametrisierung nach der Bogenlänge

Die Parameterdarstellung

$$\tilde{\gamma}(s) := \gamma(t(s))$$

heißt Parameterdarstellung nach der Bogenlänge. Sie ist äquivalent zu γ. Jeder Abschnitt von $\tilde{\gamma}$ hat die gleiche Länge wie das entsprechende Definitionsintervall von $\tilde{\gamma}$.

9.3.22 Satz

Ist $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ glatt, so existiert die PD $\tilde{\gamma}(s) = \gamma(t(s))$ nach der Bogenlänge und es gilt:

$$\|\tilde{\gamma}'(s)\| = 1.$$

Beachte: Es ist $s'(t) = \|\gamma'(t)\|$.

Beweis:

$$s(t) = \int_a^t \|\gamma'(\tau)\|\, d\tau$$

$s \in C^1([a,b])$ (früherer Satz).

$$s'(t) = \|\gamma'(t)\| > 0,$$

wegen der Glattheit von γ.
$t = t(s)$ ist dann ebenfalls C^1, also auch

$$\tilde{\gamma}(s) = \gamma(t(s)).$$

Es gilt:

$$\|\tilde{\gamma}'(s)\| = \|\gamma'(t(s))\| t'(s) = \|\gamma'(t(s))\| \frac{1}{s'(t)}\bigg|_{t=t(s)} = 1$$

9.4 Kurvenintegral

9.4.1 Definition

Sei $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ und $\varphi\colon |\gamma| \to \mathbb{R}$ bzw. $f\colon |\gamma| \to \mathbb{R}^n$. Dann setzt man

(a)

$$\int\limits_\gamma \varphi(x)\, ds := \int\limits_a^b \varphi(\gamma(t))\, ds(t)$$

mit der Bogenlänge $s(t)$. „Integral nach der Bogenlänge“.

(b)

$$\int\limits_\gamma \varphi(x)\, dx_j := \int\limits_a^b \varphi(\gamma(t))\, d\gamma_j(t)$$

für $j = 1, \dots, n$.

(c)

$$\int\limits_\gamma f(x) \cdot dx := \sum_{j=1}^n \int\limits_\gamma f_j(x)\, dx_j = \sum_{j=1}^n \int\limits_a^b f_j(\gamma(t))\, d\gamma_j(t)$$

„Kurvenintegral“

Dies ist, falls die rechten Seiten als RS-Integrale existieren. Die Existenz ist gesichert, wenn φ bzw. f stetig ist und γ rektifizierbar ist.

9.4.2 Bemerkungen

(a) Diese Kurvenintegrale hängen nur von der Äquivalenzklasse von γ ab.
Beweis: Sei $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ und $\alpha\colon [c,d] \to \mathbb{R}^n$ mit $\gamma(t) = \alpha(h(t))$ und $h\colon [a,b] \to [c,d]$ bijektiv, stetig, streng wachsend.
Zeige:

$$\int\limits_\gamma \varphi(x)\, dx_j \stackrel{1}{=} \int\limits_\alpha \varphi(x)\, dx_j.$$

Sei $Z = \{t_0, \dots, t_m\}$ Zerlegung von $[a,b]$
und $Z' = \{t'_0, \dots, t'_m\}$ Zerlegung von $[c,d]$ mit $t'_k = h(t_k)$.
Es gilt dann:

$$\begin{aligned}
\sigma(Z, \{t_1, \dots, t_m\}, \varphi \circ \gamma, \gamma_j) &= \sum_{k=1}^m \varphi(\gamma(t_k))(\gamma_j(t_k) - \gamma_j(t_{k-1})) \\
&= \sum_{k=1}^m \varphi(\alpha(h(t_k)))(\alpha_j(h(t_k)) - \alpha_j(h(t_{k-1}))) \\
&= \sum_{k=1}^m \varphi(\alpha(t'_k))(\alpha_j(t'_k) - \alpha_j(t'_{k-1})) \\
&= \sigma(Z', \{t'_1, \dots, t'_m\}, \varphi \circ \alpha, \alpha_j)
\end{aligned}$$

Daraus folgt die Gleichheit der Summen und damit die Gleichheit der Integrale.

(b) Ist γ eine C^1-Kurve, so ist

$$\int_\gamma \varphi(x)\,ds = \int_a^b \varphi(\gamma(t))\|\gamma'(t)\|\,dt$$

$$\int_\gamma \varphi(x)\,dx_j = \int_a^b \varphi(\gamma(t))\gamma_j'(t)\,dt$$

$j = 1, \ldots, n$

$$\int_\gamma f(x)\cdot dx = \int_a^b f(\gamma(t))\cdot\gamma'(t)\,dt$$

(c) Physikalische Interpretation (im $\mathbb{R}^3$):
Sei $G \subseteq \mathbb{R}^3$ ein Gebiet und $K\colon G \to \mathbb{R}^3$ stetig.
K ist ein „Kraftfeld“.
Ist nun $\gamma\colon [a,b] \to G$ ein Weg, dann ist

$$-m\int_\gamma K(x)\,dx$$

die Arbeit, die benötigt wird, um einen Massepunkt mit der Masse m gegen dieses Kraftfeld von $\gamma(a)$ nach $\gamma(b)$ zu bewegen.

(d) Geometrische Interpretation von (a):
Sei $\varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ und $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^2$.
Dann ist $\int_\gamma \varphi(x)\,ds$ die Mantelfläche, die durch φ und γ im $\mathbb{R}^3$ aufgespannt wird.

9.4.3 Beispiel im $\mathbb{R}^2$

Sei $f(x,y) = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$.
Berechne das Wegintegral von $(0,0)$ nach $(1,1)$ über verschiedene Wege

1. Sei

$$\gamma_1(t) = \begin{cases} \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix} & 0 \le t \le 1 \\ \begin{pmatrix} 1 \\ t-1 \end{pmatrix} & 1 < t \le 2 \end{cases}.$$

Es ist dann

$$\gamma_1'(t) = \begin{cases} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} & 0 \le t \le 1 \\ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} & 1 < t \le 2 \end{cases}.$$

$$\int_{\gamma_1} f(x,y)\,d(x,y) = \int_0^1 (-0\cdot 1 + t\cdot 0)\,dt + \int_1^2 (-(t-1)\cdot 0 + 1\cdot 1)\,dt = 1$$

2. Sei
$$\gamma_2(t) = \begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix} \text{ für } 0 \le t \le 1.$$
Dann ist
$$\gamma_2'(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$
$$\int\limits_{\gamma_2} f(x,y)\,d(x,y) = \int\limits_0^1 (-t \cdot 1 + t \cdot 1)\,dt = 0$$

3. Sei
$$\gamma_3(t) = \begin{cases} \begin{pmatrix} 0 \\ t \end{pmatrix} & 0 \le t \le 1 \\ \begin{pmatrix} t-1 \\ 1 \end{pmatrix} & 1 < t \le 2 \end{cases}.$$
Dann ist
$$\gamma_3'(t) = \begin{cases} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} & 0 \le t \le 1 \\ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} & 1 < t \le 2 \end{cases}$$
$$\int\limits_{\gamma_3} f(x,y)\,d(x,y) = -1$$

9.4.4 Eigenschaften der Kurvenintegrale

(a) Additivität:
$$\int\limits_\gamma (\varphi(x) + \psi(x))\,ds = \int\limits_\gamma \varphi(x)\,ds + \int\limits_\gamma \psi(x)\,ds$$
$$\int\limits_\gamma (f(x) + g(x)) \cdot dx = \int\limits_\gamma f(x) \cdot dx + \int\limits_\gamma g(x) \cdot dx$$

(b) Homogenität ($\lambda \in \mathbb{R}$):
$$\int\limits_\gamma \lambda\varphi(x)\,ds = \lambda \int\limits_\gamma \varphi(x)\,dx$$
$$\int\limits_\gamma \lambda f(x) \cdot dx = \lambda \int\limits_\gamma f(x) \cdot dx$$

(c) Dreiecksungleichung:
$$\begin{aligned} \left| \int\limits_\gamma f(x) \cdot dx \right| &\le \int\limits_\gamma \|f(x)\| \cdot dx \\ &\le \sup_{x \in |\gamma|} \|f(x)\| \cdot L(\gamma) \end{aligned}$$

(d) Aneinanderhängen:

$$\int\limits_{\gamma_1+\cdots+\gamma_m} f(x)\,dx = \sum_{j=1}^{m} \int\limits_{\gamma_j} f(x)\,dx$$

$$\int\limits_{\gamma_1+\cdots+\gamma_m} \varphi(x)\,ds = \sum_{j=1}^{m} \int\limits_{\gamma_j} \varphi(x)\,ds$$

(e)

$$\int\limits_{-\gamma} f(x)\cdot dx = -\int\limits_{\gamma} f(x)\cdot dx$$

$$\int\limits_{-\gamma} \varphi(x)\,ds = \int\limits_{\gamma} \varphi(x)\,ds$$

Beweis:

(a) ✓

(b) ✓

(c) Falls γ eine C^1-Kurve ist:

$$\begin{aligned}
\left|\int\limits_{\gamma} f(x)\cdot dx\right| &= \left|\int\limits_a^b f(\gamma(t))\cdot\gamma'(t)\,dt\right| \\
&\leq \int\limits_a^b |f(\gamma(t))\cdot\gamma'(t)\,dt| \\
&\overset{\text{CSU}}{\leq} \int\limits_a^b \|f(\gamma(t))\|\cdot\|\gamma'(t)\|\,dt \\
&= \int\limits_{\gamma} \|f(x)\|\cdot ds \\
&\leq \sup_{x\in|\gamma|} \|f(x)\|\cdot\int\limits_{\gamma} ds \\
&= \sup \|f(x)\|\cdot L(\gamma)
\end{aligned}$$

(d) ✓

(e) Für C^1-Kurven:

Sei $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$, $\alpha := -\gamma$, d. h. $\alpha(t) = \gamma(-t)$ für $-b \le t \le -a$.

$$\begin{aligned}
\int_{-\gamma} f(x)\cdot dx &= \int_{-b}^{-a} f(\gamma(-t))\cdot(-\gamma'(-t))\,dt \\
&= \left|\begin{matrix}\text{Substitution}\\ \tau = -t \\ d\tau = -dt\end{matrix}\right| \\
&= \int_a^b f(\gamma(\tau))\cdot\gamma'(\tau)\,d\tau \\
&= -\int_a^b f(\gamma(\tau))\gamma'(\tau)\,d\tau \\
&= -\int_\gamma f(x)\cdot dx
\end{aligned}$$

Für das Integral nach der Bogenlänge gilt:

$$\begin{aligned}
\int_\gamma \varphi(x)\,ds &= \int_{-b}^{-a} \varphi(\gamma(-t))\|-\gamma'(-t)\|\,dt \\
&= -\int_a^b \varphi(\gamma(\tau))\cdot\|\gamma'(\tau)\|\,d\tau \\
&= \int_\gamma \varphi(x)\,ds
\end{aligned}$$

9.5 Kurvenintegrale und Stammfunktionen

9.5.1 Definition: Vektorfeld, Potential

Sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Gebiet und $f\colon D \to \mathbb{R}^n$ stetig. Dann nennt man f auch *Vektorfeld*. f heißt *Gradientenfeld*, wenn eine Funktion $F \in C^1(D)$ existiert mit $\operatorname{grad} F = F' = f$. F heißt auch *Stammfunktion*, $-F = U$ heißt auch *Potential* von f.

9.5.2 Bemerkung

Für $n = 1$ und $D = (a,b)$ ist jedes Vektorfeld auch ein Gradientenfeld (Hauptsatz):

$$F(x) := \int_c^x f(t)\,dt, \quad F' = f$$

9.5.3 Beispiel

Sei $n = 3$.

Betrachte einen Massepunkt M in $x = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$

und einen Massepunkt m in $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$.
Gravitationsfeld (mit Gravitationskonstante γ):

$$-\gamma \cdot m \cdot M \cdot \frac{x}{\|x\|^3}$$

Gravitationspotential (für $x \neq 0$):

$$U = -\gamma \cdot m \cdot M \cdot \frac{1}{\|x\|}$$

$$U_{x_i} = -\gamma m M \left(-\frac{1}{2}\right) \left(\sum_{j=1}^{n} x_j^2\right)^{-3/2} \cdot 2x_i = \gamma m M \frac{x_i}{\|x\|^3}$$

9.5.4 Satz

Sei $f\colon D \to \mathbb{R}$ ein Vektorfeld. Dann sind äquivalent:

(a) f ist ein Gradientenfeld, d. h. f besitzt eine Stammfunktion.

(b) $\int\limits_\gamma f(x) \cdot dx$ ist nur abhängig von Anfangs- und Endpunkt von γ.

(c) $\int\limits_\gamma f(x)\, dx = 0$ für geschlossene Kurven.

In (b) und (c) ist $\gamma\colon [a, b] \to D$, (stückweise) stetig differenzierbar.

Beweis:

(a)⇒(c): Sei $F' = f$ und γ sei C^1. Dann ist

$$\int\limits_\gamma f(x) \cdot dx = \int\limits_a^b f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\, dt = \int\limits_a^b F'(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\, dt$$
$$= F(\gamma(t))\Big|_a^b = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)) = 0$$

(b)⇒(a): Sei $\xi \in D$ fest.
Für $x \in D$ sei γ_x ein beliebiger Weg von ξ nach x, $\gamma_x \in C^1$.

$$F(x) = \int\limits_{\gamma_x} f(y) \cdot dy$$

ist unabhängig von γ_x. Außerdem ist

$$F(x + h) - F(x) = \int\limits_s f(y) \cdot dy.$$

Sei $\varepsilon > 0$. Wähle δ dazu so, daß $K(x,\delta) \subseteq D$ und $\|f(x) - f(y)\| < \varepsilon$ für alle $y \in K(x,\delta)$ ist.

$$\begin{aligned}|F(x+h) - F(x) - h \cdot f(x)| &= \left| \int_s (f(y) - f(x))\, dy \right| \\ &\leq \int_s \varepsilon \cdot ds = \varepsilon \cdot \|h\|\end{aligned}$$

Also ist $F' = f$.

(c)⇒(b): Seien γ_1 und γ_2 Wege in D von α nach β.
$\gamma_1 - \gamma_2 = \gamma$ ist geschlossen. Damit ist

$$0 = \int_\gamma f(x)\, dx = \int_{\gamma_1} f(x)\, dx - \int_{\gamma_2} f(x)\, dx.$$

9.5.5 Bemerkungen

(1) Eine Stammfunktion ist bis auf eine additive Konstante eindeutig bestimmt, denn sind F und F_1 Stammfunktionen, so ist $(F - F_1)' = 0$, also ist $F - F_1$ konstant.

(2) $f(x,y) = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$ hat keine Stammfunktion, denn:

(3) Ist $f \in C^1(D)$ ein Gradientenfeld, so gilt

$$\frac{\partial f_\mu}{\partial x_\nu} = \frac{\partial f_\nu}{\partial x_\mu} \tag{9.2}$$

für $\mu, \nu = 1, \ldots, n$.
(9.2) ist notwendig für Stammfunktionen.
Beweis: Sei $F' = f$ und $f_\nu = \frac{\partial F}{\partial x_\nu}$. Dann ist

$$\frac{\partial f_\nu}{\partial x_\mu} = \frac{\partial^2 F}{\partial x_\mu \partial x_\nu} = \frac{\partial^2 F}{\partial x_\nu \partial x_\mu} = \frac{\partial f_\mu}{\partial x_\nu}.$$

(4) Sei

$$f(x,y) = \frac{1}{x^2+y^2} \cdot \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}.$$

Dann ist

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{-y}{x^2+y^2}\right) &= -\frac{1}{x^2+y^2} - \frac{-y \cdot 2y}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2+y^2)^2} \\ \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right) &= -\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\end{aligned}$$

Es liegt Gleichheit vor, aber f ist kein Gradientenfeld im $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.
Setze $\gamma(t) = r \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$ für $0 \leq t \leq 2\pi$. Damit ist

$$\begin{aligned}\int_\gamma f(x,y)\, d(x,y) &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{r^2}(-r\sin t, r\cos t) \cdot r(-\sin t, \cos t)\, dt \\ &= \int_0^{2\pi} (\sin^2 t) + (\cos^2 t)\, dt = 2\pi \neq 0\end{aligned}$$

9.5.6 Lemma von Poincaré

Sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$ ein sternförmiges Gebiet und $f \in C^1(D, \mathbb{R}^n)$ erfülle die Gleichung (9.2). Dann besitzt f eine Stammfunktion.

Beweis: OBdA sei $\xi = 0$ und D sei sternförmig bzgl. ξ. Setze

$$F(x) := \int_{s_x} f(y) \cdot dy.$$

Dabei ist $s_x \colon [0,1] \to D$ mit $s_x(t) = tx$. Damit ist

$$F(x) = \int_0^1 f(tx) \cdot x \, dt = \sum_{\nu=1}^n x_\nu \int_0^1 f_\nu(tx) \, dt.$$

Ist $F \in C^1(D)$? Dies wird später gezeigt.
Ist $F' = f$. Zeige dies jetzt: Es ist

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial x_\mu} &= \int_0^1 f_\mu(tx) \, dt + \sum_{\nu=1}^n x_\nu \frac{\partial}{\partial x_\mu} \int_0^1 f_\nu(xt) \, dt \\
&\overset{\odot}{=} \int_0^1 f_\mu(tx) \, dt + \sum_{\nu=1}^n x_\nu \int_0^1 \frac{\partial}{\partial x_\mu} f_\nu(xt) \, dt
\end{aligned}$$

Dabei wird $\odot$ später gezeigt.
Mit

$$\int_0^1 \frac{\partial}{\partial x_\mu} f_\nu(tx) \, dt = \int_0^1 t \frac{\partial f_\nu}{\partial x_\mu}(tx) \, dx = \int_0^1 t \frac{\partial f_\mu}{\partial x_\nu}(tx) \, dx$$

gilt dann:

$$\frac{\partial F}{\partial x_\mu} = \int_0^1 \left(f_\mu(tx) + \sum_{\nu=1}^n t x_\nu \frac{\partial f_\mu}{\partial x_\nu}(tx) \right) dt.$$

Mit

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \left[t f_\mu(tx) \right] &= f_\mu(tx) + t \frac{\partial}{\partial t} (f_\mu(tx_1, \dots, tx_n)) \\
&= f_\mu(tx) = t \sum_{\nu=1}^n \frac{\partial f_\mu}{\partial x_\nu}(tx) x_\nu
\end{aligned}$$

folgt dann:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial x_\mu} &= \int_0^1 \frac{d}{dt} \left[t \cdot f_\mu(tx) \right] dt \\
&= t f_\mu(tx) \Big|_0^1 = f_\mu(x).
\end{aligned}$$

Zeige nun, daß ⊙ gilt, d. h. gilt

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu}\int_0^1 f_\nu(tx)\,dt \stackrel{?}{=} \int_0^1 \frac{\partial}{\partial x_\mu}\left[f_\nu(tx)\right]\,dt = \int_0^1 t\frac{\partial f_\nu}{\partial x_\mu}(tx)\,dt$$

Setze $\varphi(s,t) := f_\nu(tx_1,\dots,tx_{\mu-1},ts,tx_{\mu+1},\dots,tx_n)$.
Gilt dann:

$$\frac{\partial}{\partial s}\int_0^1 \varphi(s,t)\,dt \stackrel{?}{=} \int_0^1 \frac{\partial}{\partial s}\varphi(s,t)\,dt$$

9.5.7 Hilfssatz

Sei $\varphi\colon (a,b)\times[0,1]\to \mathbb{R}$ stetig und $\varphi_s\colon (a,b)\times[0,1]\to\mathbb{R}$ stetig. Dann ist

$$\Phi(s) = \int_0^1 \varphi(s,t)\,dt$$

stetig differenzierbar in (a,b) und es ist

$$\Phi'(s) = \int_0^1 \varphi_s(s,t)\,dt.$$

Beweis: Sei $s\in(a,b)$ fest.
φ_s ist gleichmäßig stetig auf dem kompakten Rechteck der Form $[s-\delta,s+\delta]\times[0,1]$.
Sei $\varepsilon>0$. Dazu existiert ein $\delta>0$, $\delta\le\sigma$ mit

$$|\varphi_s(s,t)-\varphi_x(u,t)|<\varepsilon \text{ für } |s-u|<\delta,\ 0\le t\le 1.$$

Sei nun $0<|h|<\delta$. Dann ist

$$\begin{aligned}\left|\frac{\Phi(s+h)-\Phi(s)}{h}-\int_0^1\varphi_s(s,t)\,dt\right| &= \left|\int_0^1\Bigg[\underbrace{\frac{\varphi(s+h,t)-\varphi(s,t)}{h}}_{\substack{=\varphi_s(s+\theta\cdot h,t)\\ \text{mit } 0<\theta=\theta(h,t)<1}}-\varphi_s(s,t)\Bigg]\,dt\right|\\ &\le \int_0^1 \underbrace{|\varphi_s(s+\theta\cdot h,t)-\varphi_s(s,t)|}_{<\varepsilon}\\ &< \varepsilon\checkmark\end{aligned}$$

9.5.8 Praktische Berechnung einer Stammfunktion

Gesucht ist Stammfunktion für

$$f=\begin{pmatrix}f_1\\ \vdots\\ f_n\end{pmatrix},\ f\in C^1.$$

1. Prüfe nach, ob
$$\frac{\partial f_\nu}{\partial x_\mu} = \frac{\partial f_\mu}{\partial x_\nu}$$
ist.

2. Halte $x_2, \dots, x_n$ fest. Suche dann eine Stammfunktion F bezüglich x_1 mit Integrationskonstante $C(x_2, \dots, x_n)$.
Es muß dann gelten:
$$\frac{\partial}{\partial x_2}(F(x_1, x_2, \dots, x_n) + C(x_2, \dots, x_n)) = F_{x_2} + C_{x_2} \overset{!}{=} f_2.$$
Wiederhole dieses dann $(n-1)$-mal.

9.5.9 Beispiele

1. Sei $n = 2$ und
$$f(x,y) = \frac{1}{x^2+y^2}\begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}.$$
f hat keine Stammfunktion in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, erfüllt aber die Gleichung (9.2).
Also existiert eine Stammfunktion in jedem Sterngebiet $D \subseteq \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Nehme z. B. $\{(x,y) \colon y > 0\}$.
Berechnung der Stammfunktion F:
$$F_x \overset{!}{=} \frac{-y}{x^2+y^2}.$$
Also ist
$$\begin{aligned} F &= \int \frac{-y}{x^2+y^2}\,dx \\ &= \left| \begin{matrix} \text{Subst.:} \\ x = yt \\ dx = y\,dt \end{matrix} \right| \\ &= \int -\frac{1}{t^2+1}\,dt = -\arctan\frac{x}{y} + C(y). \end{aligned}$$
Es muß weiter gelten:
$$\begin{aligned} \frac{x}{x^2+y^2} &\overset{!}{=} F_y = -\frac{\partial}{\partial y}\left(\arctan\frac{x}{y}\right) + C'(y) \\ \frac{\partial}{\partial y}\left(\arctan\frac{x}{y}\right) &= \frac{1}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2} \cdot \frac{-x}{y^2} = \frac{-x}{x^2+y^2}. \end{aligned}$$
Also ist $C'(y) = 0$ und damit
$$F(x,y) = -\arctan\frac{x}{y} + c.$$

2. Sei $D \subset \mathbb{R}^2$ ein sternförmiges Gebiet und $u \in C^1(D)$.
Gesucht ist $v \in C^1(D)$, so daß die Cauchy-Riemann-Gleichung
$$\begin{aligned} u_x &= v_y \\ u_y &= -v_x \end{aligned}$$

erfüllt ist. D. h., daß eine Stammfunktion von $\begin{pmatrix} -u_y \\ u_x \end{pmatrix}$ gesucht wird.
Wenn $u \in C^2(D)$ ist, muß

$$(-u_y)_y = (u_x)_x \iff u_{xx} + u_{yy} = 0$$

erfüllt sein, damit eine Stammfunktion existiert. Eine notwendige Bedingung ist also

$$u_{xx} + u_{yy} = 0 \text{ in } D,$$

d. h. u ist harmonisch.
Konkret: Sei

$$u(x, y) = e^x \cos y + xy.$$

Dann ist

$$\begin{aligned} u_x &= e^x \cos y + y & \qquad u_y &= -e^x \sin y + x \\ u_{xx} &= e^x \cos y & u_{yy} &= -e^x \cos y \end{aligned}$$

Also ist

$$u_{xx} + u_{yy} = 0 \text{ in } \mathbb{R}^2.$$

Damit ist u harmonisch und die Cauchy-Riemann-Gleichung ist lösbar.
Setze

$$v_x = -u_y = e^x \sin y - x.$$

Halte nun y fest. Dann ist

$$v = e^x \sin y - \frac{x^2}{2} + C(y)$$

und damit muß dann noch gelten

$$v_y = e^x \cos y + C'(y) \stackrel{!}{=} e^x \cos y + y$$

$$\iff C'(y) = y \iff C(y) = \frac{y^2}{2} + c$$

Zusammen ist also

$$v = e^x \sin y - \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2}.$$