10 Das Lebesgue-Integral[1]

10.1 Nullmengen und Treppenfunktionen

10.1.1 Definition: Intervall im $\mathbb{R}^n$

Sei $a, b \in \mathbb{R}^n$. Dann ist

$$(a,b) = \{x \in \mathbb{R}^n \colon a_\nu < x_\nu < b_\nu \text{ für } \nu = 1, \ldots, n\}$$

ein offenes und

$$[a,b] = \{x \in \mathbb{R}^n \colon a_\nu \leq x_\nu \leq b_\nu \text{ für } \nu = 1, \ldots, n\}$$

ein abgeschlossenes Intervall.
Im $\mathbb{R}^2$ ist ein Intervall ein Rechteck, im $\mathbb{R}^3$ ein Quader.
Jede Menge $I \subseteq \mathbb{R}^n$ mit $(a,b) \subseteq I \subseteq [a,b]$ für passende $a, b \in \mathbb{R}^n$ heißt Intervall.

$$m(I) = (b_1 - a_1) \cdot (b_2 - a_2) \ldots (b_n - a_n)$$

heißt *elementarer Inhalt* von I.

10.1.2 Definition: Nullmenge

$N \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt *Nullmenge*, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ endlich oder abzählbar viele Intervalle $I_1, I_2, \ldots$ gibt mit $N \subseteq \bigcup\limits_k I_k$ und $\sum\limits_k m(I_k) < \varepsilon$.

10.1.3 Beispiele und Bemerkungen

(a) Einpunktige Mengen sind Nullmengen.

(b) Sind $N_1, N_2, \ldots$ endlich viele oder abzählbar viele Nullmengen, dann ist auch $N = \bigcup\limits_k N_k$ wieder eine Nullmenge.

(c) Hyperebenen $H = \{x \in \mathbb{R}^n \colon x_\nu = \text{const.}\}$ für ein ν sind Nullmengen. Ebenso sind Ränder von Intervallen Nullmengen.

(d) In der Definition der Nullmenge kann man die I_k als offen annehmen.

(e) Kompakte Nullmengen kann man bei gegebenem $\varepsilon > 0$ durch endlich viele $I_1, \ldots, I_\ell$ überdecken mit $\sum\limits_{k=1}^{\ell} m(I_k) < \varepsilon$.

(f) Sei $f \colon [a,b] \to \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar. Dann ist

$$\mathrm{Graph}(f) = \{x, f(x)) \colon a \leq x \leq b\} \subseteq \mathbb{R}^2$$

eine Nullmenge im $\mathbb{R}^2$.

[1] Version 190 vom 13. Februar 2006

Beweis:

(a) ✓

(b) Sei $\varepsilon > 0$. Dann ex. zu $k = 1, 2, \ldots$ Intervalle $I_{k,\nu}$ mit $N_k \subseteq \bigcup_\nu I_{k,\nu}$ und $\sum_\nu m(I_{k,\nu}) < \varepsilon \cdot 2^{-k}$.
Sei $I_1, I_2, \ldots$ Anordnung aller Intervalle $I_{k,\nu}$ für $k = 1, 2, \ldots$ und $\nu = 1, 2, \ldots$. Es ist damit

$$N \subseteq \bigcup_k \bigcup_\nu I_{k,\nu} = \bigcup_\nu I_\nu$$

und

$$\sum_\nu m(I_\nu) = \sum_k \underbrace{\sum_\nu m(I_{k,\nu})}_{<\varepsilon 2^{-k}} < \sum_k \varepsilon \cdot 2^{-k} \leq \varepsilon \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k = \varepsilon.$$

(c) Als Aufgabe: Setze

$$H_k := H \cap \underbrace{[-k, k] \times \cdots \times [-k, k]}_{n\text{-mal}}.$$

Weise nach: H_k ist Nullmenge. Dann ist H Vereinigung der H_k.

(d) Sei $\varepsilon > 0$ und $I_1, I_2, \ldots$ mit $N \subseteq \bigcup_k I_k$ und $\sum_k m(I_k) < \frac{\varepsilon}{2}$.
Umschreibe jedes I_k mit einem offenen und größeren Intervall J_k:
Wähle J_k so, daß $I_k \subseteq J_k$ und $m(J_k) < m(I_k) + \varepsilon 2^{-k-1}$ ist.
Dann ist $N \subseteq \bigcup_k J_k$. J_k ist offen und

$$\sum_k m(J_k) < \underbrace{\sum_k m(I_k)}_{<\varepsilon/2} + \underbrace{\sum_k \varepsilon 2^{-k-1}}_{\leq\varepsilon/2} < \varepsilon.$$

(e) Siehe Literatur

(f) Aufgabe: Übungsblatt 1
Bilde die Differenz von Ober- und Untersumme bei einer Zerlegung, verfeinere die Zerlegung dann immer mehr.

10.1.4 Satz

Folgende Aussagen sind äquivalent:

1. $N \subseteq \mathbb{R}^n$ ist Nullmenge.
2. Es gibt Intervalle $I_1, I_2, \ldots$ mit $\sum m(I_k) < \infty$, so daß jedes $x \in N$ in unendlich vielen I_k enthalten ist.

Beweis:

„$\Leftarrow$“: Sei $\varepsilon > 0$. Wähle ℓ so, daß

$$\sum_{k=\ell}^{\infty} m(I_k) < \varepsilon$$

Es ist dann immer noch

$$N \subseteq \bigcup_{k=\ell}^{\infty} I_k.$$

Also ist N Nullmenge.

„⇒“: Sei $\varepsilon = 1$ und $k \in \mathbb{N}$.
Es ex. Intervalle $I_{k,1}, I_{k,2}, \ldots$ mit $N \subseteq \bigcup\limits_{\nu} I_{k,\nu}$ und $\sum\limits_{\nu} m(I_{k,\nu}) < 2^{-k}\varepsilon$. $I_1, I_2, \ldots$ sei Abzählung der $I_{k,\nu}$. Dann ist

$$\sum_{\nu} m(I_\nu) < \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} = 1.$$

Sei nun $x \in N$. Für $k = 1, 2, \ldots$ ex. ν_k mit $x \in I_{k,\nu_k} = I_{j(k)}$.
$\ell \neq k \;\Rightarrow\; j(\ell) \neq j(k)$, d. h. $x \in I_{j(1)}, I_{j(2)}, \ldots$. Alle $I_{j(k)}$ sind verschieden.

10.1.5 Sprechweise: fast überall

Sei E eine Eigenschaft, die für alle $x \in \mathbb{R}^n$ erklärt ist, d. h. $E(x)$ trifft zu oder nicht. E gilt *fast überall* (f. ü.), wenn $\{x\colon E(x) \text{ ist falsch}\}$ eine Nullmenge ist.

10.1.6 Beispiel

Sei $E(x) =$„Eine Koordinate von x ist irrational“.
Die Menge $\{x\colon E(x) \text{ ist falsch}\} = \mathbf{Q}^n$ ist abzählbar, also eine Nullmenge.

10.1.7 Definition: Treppenfunktion

Eine beschränkte Funktion $\varphi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ heißt *Treppenfunktion*, wenn es endlich viele Intervalle $I_1, \ldots, I_k$ und $c_1, \ldots, c_k \in \mathbb{R}$ gibt, so daß $\varphi(x) = c_j$ in I_j^0 und $\varphi(x) = 0$ außerhalb von $\bar{I}_1 \cup \cdots \cup \bar{I}_k$ ist. Auf den Rändern darf φ beliebige beschränkte Werte annehmen.

10.1.8 Satz

Mit φ und ψ sind auch $\lambda\varphi$ für $\lambda \in \mathbb{R}$, $\varphi + \psi$, $\max(\varphi, \psi)$, $\varphi^+ = \max(\varphi, 0)$, $\varphi^- = \max(-\varphi, 0)$ und $|\varphi|$ Treppenfunktionen.

10.1.9 Bemerkung

Die Treppenfunktionen $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ bilden einen Vektorraum über $\mathbb{R}$. Genauer: Es ist ein Untervektorraum zum Vektorraum der Funktionen $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.
$\overline{\{x\colon \varphi(x) \neq 0\}}$ heißt *Träger* von φ. Der Träger ist kompakt.

10.1.10 Definition: Lebesgue-Integral bei Treppenfunktionen

Ist φ eine Treppenfunktion, so heißt

$$\int \varphi = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)\,dx := \sum_{j=1}^{k} c_j \cdot m(I_j)$$

Lebesgue-Integral von φ.

10.1.11 Bemerkung

1) Ist $n = 1$ und $I_1, \ldots, I_k \subseteq [a, b]$, so entspricht

$$\int \varphi = \int\limits_a^b \varphi(x)\,dx$$

dem Riemann-Integral.

2) Sind die $c_j \geq 0$, dann ist $c_j \cdot m(I_j)$ der Inhalt von $\underbrace{I_j \times [0, c_j]}_{\subseteq \mathbb{R}^{n+1}}$ im $\mathbb{R}^{n+1}$.

10.1.12 Satz: Eigenschaften des Lebesgue-Integrals

Das Lebesgue-Integral hat folgende Eigenschaften:

(1) $\int \lambda\varphi = \lambda \int \varphi$ für $\lambda \in \mathbb{R}$

(2) $\int \varphi + \psi = \int \varphi + \int \psi$

(3) $\varphi \overset{\text{f.ü.}}{\leq} \psi \Rightarrow \int \varphi \leq \int \psi$

(4) $\left|\int \varphi\right| \leq \int |\varphi|$

Beweis:

(1) Aufgabe

(2) Aufgabe

(3) Sei $\varphi \leq \psi$ fast überall. Die gemeinsamen Konstanzintervalle seien $I_1, \ldots, I_k$.
Für I_1 gilt: $c_1 = \varphi(x) \leq \psi(x) = d_1$ in I_1^0.
Annahme: $c_1 > d_1$. Dann ist $\varphi > \psi$ in I_1^0. Da aber I_1 keine Nullmenge ist ergibt sich ein Widerspruch zur Voraussetzung.

$$\int \varphi = \sum_{j=1}^{k} c_j m(I_j) \leq \sum_{j=1}^{k} d_j m(I_j) = \int \psi$$

(4) Folgt aus (3), denn es ist $-|\varphi| \leq \varphi \leq |\varphi|$. Also ist -$\int |\varphi| \leq \int \varphi \leq \int |\varphi|$.

10.1.13 Lemma A

Seien φ_k Treppenfunktionen (TF) mit:

1. $\varphi_k \geq 0$ fast überall,
2. $\varphi_{k+1}(x) \leq \varphi_k(x)$ fast überall,
3. $\lim\limits_{k\to\infty} \varphi_k(x) = 0$.

Dann gilt für $k \to \infty$:

$$0 \leq \int \varphi_k \to 0.$$

Beweis: Die Konstanzintervalle von φ_k seinen $I_{k\nu}$ mit $\nu = 1, \ldots, \ell_k$.

$$N = \{x\colon \varphi_k \not\to 0\} \cup \bigcup_{k,\nu} \partial I_{k\nu}$$

ist nach Voraussetzung eine Nullmenge. Es ist

$$\text{Träger}(\varphi_k) \subseteq \text{Träger}(\varphi_1) = MA = \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \varphi_1(x)$$

$$B = \sum_{j=1}^{\ell_1} m(I_{1j}).$$

Sei nun $\varepsilon > 0$.
Dann existieren offene Intervalle $J_1, J_2, \ldots$ mit $N \subseteq \bigcup_i J_i$ und $\sum_i m(J_i) < \varepsilon$.
Sei $x \neq N$. Dann existiert ein Index $k(x)$ mit $\varphi_k(x) < \varepsilon$ für $k \geq k(x)$.
Sei $I_{(x)}$ das Konstanzintervall von $\varphi_k(x)$, das x enthält. Dann ist $\varphi_{k(x)}(y) < \varepsilon$ für alle $y \in I_{(x)}$ und $\varphi_k(y) < \varepsilon$ für alle $y \in I_{(x)}$ und $k \geq k(x)$.
Es ist (M ist kompakt):

$$M \subseteq M \setminus N \cup N \subseteq \bigcup_{x \in M \setminus N} I(x) \cup \bigcup_i J_i.$$

Mit dem Satz von Heine-Borel (7.5.11 auf Seite 182) gilt dann:
Endlich viele $J_1, \ldots, J_p$ und $I_{(x^{(1)})}, \ldots, I_{(x^{(q)})}$ überdecken ebenfalls M. Setze

$$k_0 = \max\left(k(x^{(1)}), \ldots, k(x^{(q)})\right).$$

Für $k \geq k_0$ gilt dann:

$$\begin{aligned} 0 \leq \int \varphi_k &\leq \sum_{j=1}^{q} m(I_{(x^{(j)})}) \cdot \varepsilon + \sum_{i=1}^{p} m(J_i) \cdot A \\ &\leq \varepsilon \cdot B + A \cdot \varepsilon = (A+B) \cdot \varepsilon. \end{aligned}$$

10.1.14 Lemma B

Seien φ_k Treppenfunktionen mit

1. $\varphi_k \leq \varphi_{k+1}$ fast überall
2. $\int \varphi_k \leq A$ für alle k.

Dann ist

$$\lim_{k \to \infty} \varphi_k(x) < +\infty \text{ fast überall.}$$

Beweis: OBdA seien alle $\varphi_k \geq 0$ fast überall. Sonst betrachte $\varphi_k - \varphi_1$ anstelle von φ_k. Die Konstanzintervalle von φ_k seien $I_{k\nu}$ mit $\nu = 1, \ldots, \ell_k$.

$$N = \{x \colon (\varphi_k(x)) \text{ ist nicht monoton wachsend}\} \cup \bigcup_{k,\nu} \partial I_{k\nu}$$

ist eine Nullmenge. Sei

$$E = \{x \notin N \colon \lim_{k \to \infty} \varphi_k(x) = +\infty\}.$$

Sei $\varepsilon > 0$. Für $k = 1, 2, \ldots$ sei

$$E_k := \{x \notin N \colon \varphi_k(x) > \frac{A}{\varepsilon}\}.$$

Es ist dann

$$E \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k.$$

E_1 wird überdeckt durch endlich viele abgeschlossene Intervalle $I_1, \ldots, I_{p_1}$ mit $\varphi_1 > A/\varepsilon$. Dabei sind $I_1^0, \ldots, I_{p_1}^0$ die Konstanzintervalle von φ_1. Möglicherweise ist $E_1 = \emptyset$.
Es ist $E_k \subseteq E_{k+1}$. Für $x \in E_k$ gilt: $\varphi_k(x) > A/\varepsilon$, $\varphi_{k+1} \geq \varphi_k(x)$.
Sei gezeigt, daß E_k von den abgeschlossenen Intervallen $I_1, \ldots, I_{p_1}, \ldots, I_{p_k}$ (dies ist wahr für $k = 1$) mit $I_\nu \cap I_\mu = \emptyset$ für $\nu \neq \nu$ und $\varphi_k(x) > A/\varepsilon$ in I_ν^0 überdeckt wird.

Dann wird $E_{k+1} \setminus E_k$ überdeckt durch $I_{p_k+1}, \dots, I_{p_{k+1}}$, abgeschlossen mit $I_\mu^0 \cap I_\nu^0 = \emptyset$ und $\varphi_{k+1}(x) > A/\varepsilon$ in I_ν^0.
Betrachte nun das Intervall I_ν für $\nu \leq p_k$ und I_μ für $\mu \leq p_k$.
In I_ν^0 ist $\varphi_{k+1} > A/\varepsilon$ und in I_μ^0 ist $\varphi_k > A/\varepsilon$.
Es ist $E_k \subseteq I_1 \cup I_2 \cup \dots \cup I_{p_k}$ und $\sum\limits_{j=1}^{p_k} m(I_j) \cdot \frac{a}{\varepsilon} < \int \varphi_k \leq A$.
Also ist $\sum\limits_{j=1}^{p_k} m(I_j) < \varepsilon$ für alle k und damit auch $\sum\limits_{j=1}^{\infty} m(I_j) < \varepsilon$.
Da auch $E \subseteq \sum\limits_{k=1}^{\infty} E_k \subseteq \sum\limits_{j=1}^{\infty} I_j$ ist, ist E eine Nullmenge.

10.2 Meßbare und integrierbare Funktionen

10.2.1 Definition: meßbar, L^+

Die Funktion $f \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

(a) heißt *meßbar*, wenn es eine Folge von Treppenfunktionen (φ_k) für $k = 1, 2, \dots$ gibt mit $\varphi_k(x) \to f(x)$ fast überall für $k \to \infty$

(b) gehört zu einer Klasse $L^+ = L^+(\mathbb{R}^n)$, wenn es eine Folge von Treppenfunktionen (φ_k) gibt mit

1.) $\varphi_k(x) \leq \varphi_{k+1}(x)$ fast überall
2.) $\int \varphi_k \leq A$ für alle k
3.) $\lim\limits_{k\to\infty} \varphi_k(x) = f(x)$ fast überall.

(c) Für $f \in L^+(\mathbb{R}^n)$ heißt

$$\int f = \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x)\, dx := \lim_{k\to\infty} \int \varphi_k$$

das *Lebesgue-Integral* von f.

10.2.2 Bemerkungen und Beispiele

(a) Ist $f \in L^+$, dann ist f meßbar.

(b) Ist $f \in L^+$, dann ist $\varphi_k(x) \leq f(x)$ fast überall.
„$\leq$“ ist dort falsch, wo $\lim\limits_{k\to\infty} \varphi_k(x) > f(x)$ ist und wo die Monotonie verletzt ist.

(c) Ist $f \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ fast überall stetig, so ist f meßbar.

(d) Die Integraldefinition für $f \in L^+$ ist unabhängig von φ_k, genauer: Ist fast überall $f \leq g$ für $f, g \in L^+$, dann ist $\int f \leq \int g$.

Beweis:

(a) ✓

(b) ✓

(c) Sei zunächst überall $f \geq 0$. Überdecke $\mathbb{R}^n$ durch abgeschlossene Würfel der Kantenlänge 2^{-k} für $k = 1, 2, \ldots$. Diejenigen Würfel, die in $[-k, k] \times \cdots \times [-k, k]$ liegen, seien $I_{k1}, \ldots, I_{k\ell_k}$. Setze

$$\varphi_k(x) = \begin{cases} \inf f(I_{k\nu}) & \text{in } I_{k\nu}^0 \text{ mit } \nu = 1, \ldots, \ell_k \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

Dann ist

$$0 \leq \varphi_k(x) \leq f(x) \text{ überall}$$

und

$$\varphi_k(x) \leq \varphi_{k+1}(x) \text{ fast überall.}$$

Zeige nun: $\varphi_k(x) \to f(x)$ in allen Stetigkeitspunkten von f, also fast überall, ausgenommen in $\bigcup\limits_{k,j} \partial I_{kj}$, einer Nullmenge (als Vereinigung von Rändern von Intervallen).
Sei f stetig in x mit $x \notin \bigcup\limits_{k,j} \partial I_{kj}$ und $\varepsilon > 0$.
Dazu existiert eine Kugel $K(x, \delta)$ mit

$$|f(x) - f(y)| < \varepsilon \text{ für alle } y \in K(x, \delta).$$

Wähle nun k so groß, daß

$$K(x, \delta) \subseteq [-k, k] \times \cdots \times [-k, k]$$

ist und dasjenige I_{kj}, das x enthält, in $K(x, \delta)$ enthalten ist.
In I_{kj} gilt nun

$$f(x) \geq \varphi_k(x) = \inf_{y \in I_{kj}} f(y) \geq f(x) - \varepsilon,$$

d. h. $|f(x) - \varphi_k(x)| < \varepsilon$ für diese k, d. h. $\varphi_k(x) \to f(x)$.✓
Für allgemeines f wird f in $f = f^+ - f^-$ aufgeteilt und jeweils φ_k berechnet.

(d) Zu f, g gehören φ_k und ψ_k wie in der Definition. Sei $\ell \in \mathbb{N}$ fest:

$$\varphi_\ell = \psi_k + (\varphi_\ell - \psi_k) \leq \psi_k + (\varphi_\ell - \psi_k)^+.$$

Setze

$$\chi_k := (\varphi_\ell - \psi_k)^+ \geq \chi_{k+1} \text{ fast überall.}$$

Es ist

$$\chi_k(x) \xrightarrow{\text{f.ü.}} (\underbrace{\varphi_\ell(x)}_{\leq f(x) \text{f.ü.}} - g(x))^+ \overset{\text{f.ü.}}{\leq} (f(x) - g(x))^+ = 0 \text{ fast überall.}$$

Aus Lemma A (10.1.13) folgt dann

$$\int \chi_k \to 0 \text{ für } k \to \infty$$

$$\int \varphi_\ell \leq \int \psi_k + \int \chi_k \to \int g + 0$$

für alle ℓ. Zusammen gilt für $\ell \to \infty$:

$$\int f \leq \int g.$$

10.2.3 Beispiel

Im $\mathbb{R}^2$ sei

$$f(x,y) = \begin{cases} e^{-x-y} & \text{für } x,y>0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

Es ist $f \in L^+$, denn es ist überall $f \geq 0$. Konstruiere φ_k wie im Beispiel zuvor. Setze

$$I^k_{\mu\nu} = [\mu \cdot 2^{-k}, (\mu+1)\cdot 2^{-k}] \times [\nu \cdot 2^{-k}, (\nu+1)\cdot 2^{-k}]$$

für $\mu, \nu = 0, \ldots, k \cdot 2^k - 1$. Es ist

$$\inf_{I^k_{\mu\nu}} f(x,y) = e^{-((\mu+1)+(\nu+1))2^{-k}} = \varphi_k(x) \text{ in } (I^k_{\mu\nu})^0.$$

Es ist dann

$$\begin{aligned} \int \varphi_k &= \sum_{\mu,\nu=0}^{k2^k-1} e^{-(\mu+\nu+2)2^{-k}} 4^{-k} = \sum_{\mu,\nu=1}^{k2^k} 4^{-k} e^{-\mu 2^{-k}} e^{-\nu 2^{-k}} \\ &= \left(\sum_{\nu=1}^{k2^k} 2^{-k} e^{-\nu 2^{-k}} \right)^2 = (e^{-2^{-k}})^2 \cdot \left(\frac{1-e^{-k}}{1-e^{-2^{-k}}} \cdot 2^{-k} \right)^2 \\ &\xrightarrow{k\to\infty} 1 \cdot 1^2 \cdot \lim_{t\to 0} \left(\frac{t}{1-e^{-t}} \right)^2 = 1. \end{aligned}$$

Später wird gezeigt:

$$\int e^{-x-y} = \int_0^\infty e^{-x}\,dx \cdot \int_0^\infty e^{-y}\,dy$$

10.2.4 Satz

Mit f und g sind auch

(a) $f+g$, λf für $\lambda \in \mathbb{R}$, $f \cdot g$, $f^+ = \max(0,f)$, $f^- = \max(0,-f)$, $max(f,g)$, $\min(f,g)$ und $|f|$ meßbar.

(b) $f+g$, λf für $\lambda \geq 0$, f^+ und $\max(f,g)$ zu L^+ gehörig. Es gilt dann

$$\int (f+g) = \int f + \int g$$
$$\int \lambda f = \lambda \int f$$

Beweis:

(a) $f+g$, λf über Regeln für Grenzwerte.
f^+: Sei $\varphi_k \to f$ fast überall, dann ist $\varphi_k^+ \to f^+$ fast überall.
$\max(f,g)$: Sei $\varphi_k \to f$ und $\psi_k \to g$ f. ü. Dann ist $(\max(\varphi_k, \psi_k) \to \max(f,g)$ f. ü.

(b) Zu f und g gehören (φ_k) und (ψ_k) mit

$$\varphi_k \leq \varphi_{k+1} \text{ f. ü.}, \varphi_k \to f \text{ f. ü. und}$$
$$\int \varphi_k \leq A \text{ für alle } k.$$

Entsprechendes gilt für ψ_k.

$f+g$: Setze $\chi_k = \varphi_k + \psi_k$. Dann ist $\chi_k \to f+g$ fast überall und

$$\int \chi_k = \int \varphi_k + \int \psi_k \leq A + B.$$

λf: Für $\lambda \geq 0$ ist $\chi_k = \lambda\varphi_k \to \lambda f$ f. ü. und $\lambda\varphi_k \leq \lambda\varphi_{k+1}$ f. ü.

$$\int (\lambda\varphi_k) = \lambda \int \varphi_k \leq \lambda A.$$

f^+: Sei $\chi_k = \varphi_k^+$. Es ist

$$\varphi_k = \varphi_k - \varphi_1 + \varphi_1 \leq \underbrace{\varphi_k - \varphi_1}_{\geq 0 \text{f. ü.}} + \underbrace{\varphi_1^+}_{\geq 0} \geq 0.$$

Also ist $\varphi_k^+ \leq \varphi_k - \varphi_1 + \varphi_1^+$ fast überall und damit

$$\int \chi_k \leq \int (\varphi_k - \varphi_1) + \int \varphi_1^+ = \underbrace{\int \varphi_k}_{\leq A} - \underbrace{\int \varphi_1 - \int \varphi_1^+}_{\text{fest}}.$$

$\max(f,g)$: Setze $\chi_k = \max(\varphi_k, \psi_k)$. Dann ist

$$\begin{aligned}\chi_k &\leq \max(\varphi_k - \varphi_1, \psi_k - \psi_1) + \max(\varphi_1, \psi_1)\\ &\leq \max(\varphi_k - \varphi_1, \psi_k - \psi_1) + \max(\varphi_1^+, \psi_1^+)\\ &\leq \varphi_k - \varphi_1 + \psi_k - \psi_1 + \varphi_1^+ + \psi_1^+\end{aligned}$$

$$\int \chi_k \leq \int \varphi_k + \int \psi_k + \text{const} \leq A + B + \text{const}.$$

10.2.5 Definition: L

Definiere

$$L = L(\mathbb{R}^n) := \{f : f = f_1 - f_2 \text{ mit } f_1, f_2 \in L^+\}.$$

Für $f \in L$, d. h. $f = f_1 - f_2$ mit $f_1, f_2 \in L^+$ heißt

$$\int f := \int f_1 - \int f_2$$

Lebesgue-Integral von f. Diese Definition ist unabhängig von der Darstellung $f = f_1 - f_2$:
Sei $f = g_1 - g_2$ mit $g_1, g_2 \in L^+$ und $f_1 - f_2 = g_1 - g_2$.
Dann ist $f_1 + g_2 = g_1 + f_2$. Dabei ist $f_1 + g_2 \in L^+$ und $g_1 + f_2 \in L^+$.
Also ist $\int f_1 + \int g_2 = \int g_1 + \int f_2$
und damit $\int f_1 - \int f_2 = \int g_1 - \int g_2$.

10.2.6 Bemerkung

(a) Ist $f \in L$, dann ist f meßbar.

(b) Zu $f \in L$ und $\varepsilon > 0$ existieren $f_1, f_2 \in L^+$ mit $f = f_1 - f_2$, $f_2 \geq 0$ fast überall und $\int f_2 < \varepsilon$.

Beweis:

(a) Klar.

(b) Sei $f = g_1 - g_2$ mit $g_1, g_2 \in L^+$.
Zu g_1 und g_2 gehören die Folgen (φ_k) und (ψ_k) von Treppenfunktionen.
Damit existiert eine Treppenfunktion ψ mit $\psi \leq g_2$ fast überall und $\int \psi > \int g_2 - \varepsilon$.
Z. B. ist $\psi = \psi_k$ für ein großes k.
Setze $f_2 := g_2 - \psi$ und $f_1 := g_1 - \psi$.
Es sind $f_1, f_2 \in L^+$ und

$$f_1 - f_2 = g_1 - \psi - (g_2 - \psi) = (g_1 - g_2) = f.$$

Da fast überall $\psi \leq g_2$ ist, ist $f_2 = g_2 - \psi \geq g_2 - g_2 = 0$ fast überall und

$$0 \leq \int f_2 = \int (g_2 - \psi) = \int g_2 - \int \psi < \varepsilon.$$

10.2.7 Aufgabe

Seien $f, g \in L$. Zeige folgende Aussagen:

1. Ist $f \leq g$ fast überall, dann ist $\int f \leq \int g$.
2. Ist $f = 0$ fast überall, dann ist $\int f = 0$.
3. Ist $\int |f| = 0$, dann ist $f = 0$ fast überall.

10.2.8 Satz

Mit f und g sind auch $f+g$, λf für $\lambda \in \mathbb{R}$, f^+, f^-, $\max(f,g)$, $\min(f,g)$ und $|f|$ in L. Insbesondere ist $L = L(\mathbb{R}^n)$ ein Vektorraum über $\mathbb{R}$ mit $\int (f+g) = \int f + \int g$ und $\int (\lambda f) = \lambda \int f$.

Beweis: Sei $f = f_1 - f_2$ und $g = g_1 - g_2$ mit $f_1, f_2, g_1, g_2 \in L^+$. Es ist dann:

$$\begin{aligned} f + g &= \underbrace{(f_1 + g_1)}_{\in L^+} - \underbrace{(f_2 + g_2)}_{\in L^+} \in L \\ \lambda f &= \underbrace{\lambda f_1}_{\in L^+} - \underbrace{\lambda f_2}_{\in L^+} \in L \text{ für } \lambda \geq 0 \\ \lambda f &= \underbrace{-\lambda f_2}_{\in L^+} - \underbrace{-\lambda f_1}_{\in L^+} \in L \end{aligned}$$

$\int (f+g) = \cdots$ und $\int (\lambda f) = \cdots$ gelten in L^+ und damit auch in L.

$$f^+ = \max(f, 0) = \max(f_1 - f_2, 0) = \underbrace{\max(f_1, f_2)}_{\in L^+} - \underbrace{f_2}_{\in L^+} \in L$$

$$\begin{aligned} f^- &= (-f)^+ = \max(-f, 0) \in L \\ \max(f,g) &= (f-g)^+ + g \in L \\ \min(f,g) &= -\max(-f,-g) \in L \\ |f| &= f^+ + f^- \in L \end{aligned}$$

10.2.9 Beispiel

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und

$$\chi_U(x) := \begin{cases} 1 & \text{für } x \in U \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

die *charakteristische Funktion*. Wenn U beschränkt ist, dann ist $\chi_U \in L^+ \subseteq L$.

Beweis: Konstruiere eine approximierende Folge (φ_k):
Überdecke $\mathbb{R}^n$ mit einem (abgeschlossenen) Würfelnetz mit der Kantenlänge 2^{-k} für $k = 0, 1, 2, \ldots$.

- 0-te Generation: Würfel der Kantenlänge 1, die in U sind: $W_1, \ldots, W_{n_0}$.
- 1-te Generation: Alle Würfel der Kantenlänge $\frac{1}{2}$, die in U aber nicht in $W_1, \ldots, W_{n_0}$ liegen: $W_{n_0+1}, \ldots, W_{n_1}$.
- $\vdots$
- $(k+1)$-te Generation: Alle Würfel der Kantenlänge 2^{-k-1}, die in U enthalten sind, aber nicht in $W_1, \ldots, W_{n_k}$ liegen: $W_{n_k+1}, \ldots, W_{n_{k+1}}$.

Setze

$$\varphi_k(x) = \begin{cases} 1 & x \text{ liegt in einem Würfel der Generation } \leq k \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

Es ist überall $\varphi_k \leq \varphi_{k+1}$ und $\varphi_k = 0$ außerhalb von U.
Es ist überall $\varphi_k \to \chi_U$ für $k \to \infty$ (Aufgabe), weil $U = \bigcup\limits_j W_j$ ist.
Da U beschränkt ist, ist $U \subseteq [-\ell, \ell] \times \cdots \times [-\ell, \ell]$ und damit

$$\int \varphi_k = \sum_{j=1}^{n_k} m(W_j) \leq (2\ell)^n.$$

Also ist $\chi_U \in L^+$.

10.3 Konvergenzsätze

10.3.1 Satz von Beppo Levi

Sei (f_k) eine Folge in $L(\mathbb{R}^n)$ mit $f_k(x) \leq f_{k+1}(x)$ fast überall und $\int f_k \leq \text{const}$ unabhängig von k. Dann ist

$$f(x) := \lim_{k\to\infty} f_k(x) < +\infty \text{ fast überall.}$$

Für f_k =Treppenfunktionen wurde dies schon in Lemma B, 10.1.14 auf Seite 257, gezeigt. Setzt man dort wo f nicht erklärt war $f(x) = 0$, so ist $f \in L(\mathbb{R}^n)$ und

$$\int f = \lim_{k\to\infty} \int f_k.$$

Beweis:

1. Zunächst für $f_k \in L^+$ mit $k = 1, 2, \ldots$:
   Dann existieren Treppenfunktionen $\varphi_{k,\nu}$ mit

$$\varphi_{k,\nu}(x) \leq \varphi_{k,\nu+1}(x) \text{ fast überall}$$
$$\int \varphi_{k,\nu} \leq \int f_k \leq \text{const. für } k = 1, 2, \ldots \text{ und } \nu = 1, 2, \ldots$$

φ_1	φ_2	φ_3	φ_4	$\ldots$
φ_{11}	φ_{12}	φ_{13}	$\ldots$	f_1
φ_{21}	φ_{22}	φ_{23}	$\ldots$	f_2
φ_{31}	φ_{32}	φ_{33}	$\ldots$	f_3
φ_{41}	φ_{42}	φ_{43}	$\ldots$	f_4

   Setze

$$\varphi_\nu(x) = \max_{1 \leq k \leq \nu} (\varphi_{k,\nu}(x)).$$

   φ_ν ist Treppenfunktion als Maximum von abzählbar vielen Treppenfunktionen. Da

$$\varphi_{k,\nu} \leq \varphi_{k,\nu+1} \text{ fast überall,}$$

   gilt auch

$$\varphi_\nu \leq \varphi_{\nu+1} \text{ fast überall.}$$

   Da

$$\varphi_{k,\nu} \leq \begin{cases} f_k & \text{fast überall für } \nu = 1, 2, \ldots \\ f_\nu & \text{für } k \leq \nu \text{ fast überall} \end{cases},$$

   ist $\varphi_\nu \leq f_\nu$ fast überall. Also ist

$$\int \varphi_\nu \leq \int f_\nu \leq \text{const.}$$

   Nach Lemma B (10.1.14, Seite 257) gilt dann

$$f(x) := \lim_{\nu \to \infty} \varphi_\nu(x) < +\infty \text{ fast überall.}$$

   Setzt man $f(x) = 0$ sonst, so ist $f \in L^+$ und $\int f = \lim_{\nu \to \infty} \int \varphi_\nu$.
   Da fast überall $\varphi_\nu \leq f_\nu$ ist, ist

$$f(x) \leq \lim_{\nu \to \infty} f_\nu(x) \text{ fast überall}$$

   und

$$\int f = \lim_{\nu \to \infty} \int \varphi_\nu \leq \lim_{\nu \to \infty} \int f_\nu.$$

   Umgekehrt: Für $\nu \geq k$ ist $\varphi_\nu \geq \varphi_{k,\nu}$ fast überall.
   Sei nun k fest und $\nu \to \infty$. Dann folgt:

$$f(x) \geq f_k(x) \text{ fast überall.}$$

   Für $k \to \infty$ folgt dann:

$$f(x) \geq \lim_{k \to \infty} f_k(x) \text{ fast überall.}$$

Aus $\varphi \geq \varphi_{k,\nu}$ folgt auch für $\nu \to \infty$

$$\int f \geq \int \lim_{\nu\to\infty} \varphi_{k,\nu} = \int f_k$$
$$\Rightarrow \int f \geq \lim_{k\to\infty} \int f_k.$$

Ergebnis: $f \in L^+$, $f = \lim\limits_{k\to\infty} f_k$ fast überall und

$$\int f = \lim_{k\to\infty} \int f_k.$$

2. Allgemeiner Fall: Sei $f_k \in L(\mathbb{R}^n)$. Dann gibt es $\tilde{g}_\nu, \tilde{h}_\nu \in L^+$ (Definition) mit

$$\underbrace{f_\nu - f_{\nu-1}}_{\in L} = \tilde{g}_\nu - \tilde{h}_\nu \text{ für } \nu = 1, 2, \ldots \text{ mit } f_0 = 0.$$

Dabei ist $\tilde{h}_\nu \geq 0$ fast überall und nach der Bemerkung 10.2.6 auf Seite 261

$$0 \leq \int \tilde{h}_\nu < 2^{-\nu}.$$

Es ist

$$\tilde{g}_\nu = (f_\nu - f_{\nu-1}) + \tilde{h}_\nu \geq 0 + 0 = 0 \text{ fast überall}$$

und

$$f_k = \sum_{\nu=1}^{k} (f_\nu - f_{nu-1}) = \underbrace{\sum_{\nu=1}^{k} \tilde{g}_\nu}_{=:g_k} - \underbrace{\sum_{\nu=1}^{k} \tilde{h}_\nu}_{=:h_k}.$$

Es sind $g_k, h_k \in L^+$, $g_k \leq g_{k+1}$ fast überall und $h_k \leq h_{k+1}$ fast überall.

$$\int h_k = \sum_{\nu=1}^{k} \underbrace{\int \tilde{h}_\nu}_{<2^{-\nu}} < \sum_{\nu=1}^{\infty} 2^{-\nu} = 1$$

$$\int g_k = \int f_k + \int h_k \leq \text{const} + 1.$$

Nach dem 1. Teil ist $g_k \to g \in L^+$ fast überall und $h_k \to h \in L^+$ fast überall.

$$\int f_k = \int g_k - \int h_k \to \int g - \int h = \int \underbrace{g - h}_{=:f} = \int f.$$

Dabei ist $f = g - h \in L$ und

$$f(x) = \lim_{k\to\infty} (g_k(x) - h_k(x)) = \lim_{k\to\infty} f_k(x) \text{ fast überall.}$$

10.3.2 Satz von Beppo Levi für Reihen

Seien $f_1, f_2 \ldots \in L(\mathbb{R}^n)$, $f_k \geq 0$ fast überall und $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \int f_k$ konvergiere.

Dann konvergiert

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$$

fast überall und es gilt

$$\int \sum_{k=1}^{\infty} f_k = \sum_{k=1}^{\infty} \int f_k.$$

Beweis: Beppo Levi auf die Partialsummen

$$\sum_{j=1}^{k} f_j$$

anwenden.

10.3.3 Beispiel: Charakteristische Funktion

Seien $U_1, U_2, \dots$ Mengen in $\mathbb{R}^n$ mit $U_1 \subseteq U_2 \subseteq \cdots$ und $U = \bigcup_{j=1}^{\infty} U_j$. Setze

$$\chi_{U_j} = \begin{cases} 1 & x \in U_j \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Es ist $\chi_{U_j} \in L$ und U ist beschränkt. Außerdem ist $\chi_{U_j} \leq \chi_{U_{j+1}}$ und $\int \chi_{U_j} \leq \text{const}$.
Später wird $\int \chi_U$ das Maß von U genannt.

10.3.4 Integrabilitätskriterium von Riemann-Lebesgue

Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ beschränkt, $f(x) = 0$ für $x < a$ und für $x > b$. Dann gilt

$$f \text{ ist Riemann-integrierbar über } [a,b] \iff f \text{ ist f. ü. stetig.}$$

Es gilt dann

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int f.$$

Beweis:

„⇒“: Sei f Riemann-integrierbar und Z_k eine äquidistante Zerlegung von $[a,b]$ mit $2^k + 1$ Teilpunkten und den Teilintervallen I_j^k für $j = 1, \dots, 2^k$. Setze

$$\varphi_k(x) = \begin{cases} \inf f(I_j^k) & \text{in } (I_j^k)^0 \text{ für } j = 1, \dots, 2^k \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\Phi_k(x) = \begin{cases} \sup f(I_j^k) & \text{in } (I_j^k)^0 \text{ für } j = 1, \dots, 2^l \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

Dann ist

$$\int \varphi_k = s(Z_k) \text{ und } \int \Phi_k = S(Z_k).$$

Nach Definition gilt

$$\varphi_k \leq f \leq \Phi_k \text{ fast überall (in } \mathbb{R} \setminus Z_k)$$
$$\int (\Phi_k - \varphi_k) = S(Z_k) - s(Z_k) \to 0 \text{ für } k \to \infty.$$

Setze $\chi_k = \Phi_k - \varphi_k$. Dann ist überall $\chi_k \geq 0$ und $\chi_{k+1} \leq \chi_k$.
Wende nun Beppo-Levi auf $(-\chi_k)$ an (Lemma B):

$$-\chi_k \leq -\chi_{k+1} \text{ und } \int -\chi_k \leq 0.$$

Also ist $-\chi_k \to -g \leq 0$ fast überall, $g \in L(\mathbb{R})$ und

$$\int -g = \lim_{k\to\infty} \int -\chi_k = 0,$$

also ist $g = 0$ fast überall.
Zeige: f ist außerhalb der Nullmenge $\{x\colon g(x) \neq 0\} \cup \bigcup_k Z_k$ stetig.
Sei $x \in [a,b] \setminus \bigcup_k Z_k$ mit $g(x) = 0$.
Sei $\varepsilon > 0$. Dann ex. k_0 mit $\Phi_k(x) - \varphi_k(x) < \varepsilon$ für $k \geq k_0$.
Somit gilt für ein festes k:

$$\Phi_k(y) - \varphi_k(y) < \varepsilon \text{ in } (x-\delta, x+\delta) \subseteq \text{Konstanzintervall.}$$

Sei nun $|y - x| < \delta$. Dann ist

$$f(y) - f(x) \overset{\text{Def.}}{\leq} \Phi_k(y) - \underbrace{\varphi_k(y)}_{=\varphi_k(x)} < \varepsilon.$$

Mit Vertauschung von x und y ist

$$f(x) - f(y) \leq \underbrace{\Phi_k(y)}_{=\Phi_k(x)} - \varphi_k(y) < \varepsilon,$$

d. h. $|f(y) - f(x)| < \varepsilon$ für $|x - y| < \delta$.

„$\Leftarrow$“: f sei fast überall stetig und Z_k, φ_k und Φ_k definiert wie im 1. Teil. Es gilt:

$$\int \varphi_k = s(Z_k) \text{ und } \int \Phi_k = S(Z_k)$$

(Früher: f f. ü. stetig, $\varphi_k \nearrow f$ f. ü. und $\Phi_k \searrow f$ f. ü. genauso.
Übrigens ist $\pm f \in L^+$, weil $\int \varphi_k \leq \sup f(\mathbb{R})(b-a)$).
Betrachte nun $\Phi_k - \varphi_k$:

$$\int f = \lim_{k\to\infty} \int \varphi_k = \lim_{k\to\infty} s(Z_k)$$
$$\int -f = \lim_{k\to\infty} \int -\Phi_k = -\lim_{k\to\infty} S(Z_k)$$
$$\Rightarrow \int f = \lim_{k\to\infty} S(Z_k) = \lim_{k\to\infty} s(Z_k).$$

Also ist f Riemann-integrierbar und $\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int f$.

10.3.5 Bemerkung

Ist f nur fast überall in $\mathbb{R}^n$ definiert, dann wird i. A. automatisch $f(x) = 0$ gesetzt, wo f zunächst nicht definiert ist.

10.3.6 Satz von Lebesgue über majorisierte Konvergenz

Sei (f_k) eine Folge von Funktionen $L(\mathbb{R}^n)$ und es gelte $f_k \to f(x)$ punktweise für $k \to \infty$ fast überall. Weiter gebe es ein $g \in L(\mathbb{R}^n)$ mit $|f_k(x)| \leq g(x)$ fast überall für $k = 1, 2, \ldots$ Dann ist $f \in L(\mathbb{R}^n)$ und es ist

$$\int f = \lim_{k\to\infty} \int f_k.$$

g heißt *Majorante*. Man sagt, die Konvergenz $f_k \to f$ ist *majorisiert*.

Beweis: Setze punktweise $g_{k\nu} := \max(f_k, f_{k+1}, \dots, f_{k+\nu})$ für festes $k \in \mathbb{N}$. Es ist überall $g_{k\nu} \le g_{k,\nu+1}$ und

$$\int g_{k\nu} \le \int g = \text{const},$$

weil fast überall $|g_{k\nu}| \le g$ ist.
Mit Beppo-Levi ist $g_{k\nu} \xrightarrow{\nu\to\infty} g_k$ fast überall, $g_k \in L(\mathbb{R}^n)$.

$$\begin{aligned}\lim_{k\to\infty} g_k(x) &= \lim_{k\to\infty}\lim_{\nu\to\infty} \max(f_k(x), \dots, f_{k+\nu}(x)) \\ &= \overline{\lim_{\ell\to\infty}}\, f_\ell(x) = f(x) \text{ fast überall.}\end{aligned}$$

Es ist $g_k = \sup(f_k, f_{k+1}, f_{k+2}, \dots)$, also ist $f_k \le g_k$ und $g_{k+1} \le g_k$.
Setze genauso $h_{k\nu} = \min(f_k, \dots, f_{k+\nu})$. Wende Beppo-Levi auf $(-h_{k\nu})_{\nu=1}^{\infty}$ an. Dann ist $h_{k\nu} \to h_k$ fast überall, $h_k \le f_k$, $h_{k+1} \ge h_k$ fast überall und $h_k \to f$.
Warum darf Beppo-Levi auf z. B. (h_k) angewandt werden?

$$\begin{aligned}|h_k| &\overset{\text{f.ü.}}{=} \lim_{\nu\to\infty} |h_{k\nu}| = \lim_{\nu\to\infty} |\min(f_k, \dots, f_{k+\nu})| \\ &\le \lim_{\nu\to\infty} \max(\underbrace{|f_k|}_{\le g}, \dots, \underbrace{|f_{k+\nu}|}_{\le g}) \le g \text{ fast überall}\end{aligned}$$

Also ist $\int h_k \le \int g$ =const. Zusammen ist $h_k \le h_{k+1} \le f \le g_{k+1} \le g_k$ fast überall, $h_k \to f$ fast überall und $g_k \to f$ fast überall.
Wende nun Beppo-Levi auf (h_k) bzw. $(-g_k)$ an. Damit ist $f \in L(\mathbb{R}^n)$ und $\int f = \lim \int h_k = \lim \int g_k$.
Da fast überall $h_k \le f_k \le g_k$ ist, folgt

$$\int f \leftarrow \int h_k \le \int f_k \le \int g_k \to \int f.$$

Also ist $\int f_k \to \int f$.

10.3.7 Folgerungen

Folgerung 1: Ist $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ meßbar und $|f| \le g$ fast überall mit $g \in L(\mathbb{R}^n)$, dann ist f integrierbar.

Folgerung 2: Ist $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ fast überall stetig und $|f| \le g$ fast überall mit $g \in L(\mathbb{R}^n)$, dann ist $f \in L(\mathbb{R}^n)$.

Folgerung 3: Sind alle f_k meßbar und ist $f_k \to f$ fast überall, so ist f meßbar.

Beweis:

Folgerung 1: Es existiert eine Treppenfunktion φ_k mit $\varphi_k \to f$ für $k \to \infty$ fast überall. Setze

$$f_k(x) = \begin{cases} g(x) & \text{wo } \varphi_k(x) > g(x) \\ -g(x) & \text{wo } \varphi_k(x) < -g(x) \\ \varphi_k(x) & \text{sonst} \end{cases}.$$

Es gilt: $|f_k(x)| \le g(x)$ und

$$\lim_{k\to\infty} f_k(x) = \begin{cases} f(x) & \text{wo } |f(x)| \le g(x),\ \varphi_k(x) \to f(x) \\ ? & \text{sonst} \end{cases}.$$

Es ist $\varphi_k(x) \to f(x)$, $|f(x)| \leq g(x)$.
Sei $\varepsilon > 0$. Dann ist $|\varphi_k(x) - f(x)| < \varepsilon$ für $k \geq k_0$ und es gibt 3 Möglichkeiten:

$$\begin{aligned} \varphi_k(x) &\leq g(x) + \varepsilon && (a) \\ \varphi_k(x) &\geq -g(x) - \varepsilon && (b) \\ -g(x) < \varphi_k(x) &< g(x) && (c) \end{aligned}$$

Setze im Fall (c) $f_k(x) = \varphi_k(x)$. Falls (a) und nicht (c) gilt, setze $g(x) = f_k(x)$. Dann ist $g(x) < \varphi_k(x) < g(x) + \varepsilon$. Für (b) und nicht (c) analog. Dann ist $|\varphi_k - f_k| < \varepsilon$, $|f_k - f| \leq |f_k - \varphi_k| + |\varphi_k - f| < 2\varepsilon$. Wende den Satz von Lebesgue an, und es ist $f \in L(\mathbb{R}^n)$.

Folgerung 2: Aus fast überall stetig folgt die Meßbarkeit. Weiter mit Folgerung 1.

Folgerung 3: Sei $h \in L(\mathbb{R}^n)$ und überall positiv (Aufgabenblatt)

$$\begin{aligned} g_k &= \frac{f_k h}{h + |f_k|} \text{ ist meßbar nach 10.3.8} \\ |g_k| &= \underbrace{\frac{|f_k|}{h + |f_k|}}_{<1} \cdot h < h \end{aligned}$$

Also ist $g_k \in L(\mathbb{R}^n)$ und der Satz von Lebesgue ist anwendbar, da

$$g_k \xrightarrow{\text{f. ü.}} g = \frac{fh}{h + |f|}$$

und $|g_k| < h$ ist. Insbesondere ist $g \in L(\mathbb{R}^n)$ und

$$f = \frac{g \cdot h}{h - |g|}$$

ist ebenfalls meßbar nach 10.3.8.

10.3.8 Hilfsüberlegung

Seien $g_1, \ldots, g_p \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ meßbar und sei $\Phi \colon \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ stetig mit $\Phi(0) = 0$.
Dann ist $\Phi(g_1(x), \ldots, g_p(x)) = \varphi(x)$ ebenfalls meßbar.

Beweis: Es existieren Treppenfuntionen $\psi_{j,k}$ mit $\psi_{j,k} \to g_j$ fast überall für $k \to \infty$ und $j = 1, \ldots, p$. Nehme $\Phi(\psi_{1,k}, \psi_{2,k}, \ldots, \psi_{p,k}) \to \varphi$ fast überall.

10.3.9 Lemma von Fatou

Es sei $f_k \in L(\mathbb{R}^n)$, $f_k \geq 0$ fast überall und $\int f_k \leq A$ für alle k. Weiter gelte $f_k \to f$ fast überall für $k \to \infty$. Dann ist $f \in L(\mathbb{R}^n)$ und es gilt

$$\int f \leq \varliminf_{k \to \infty} \int f_k.$$

Achtung: Dabei kann auch „<“ gelten!.

Beweis: Setze $g_k := \inf(f_k, f_{k+1}, \dots)$. g_k ist wie im Beweis des Satzes von Lebesgue (10.3.6) in $L(\mathbb{R}^n)$, weil fast überall $0 \le g_k \le f_k$ ist.

$$f(x) \overset{\text{f.ü.}}{=} \lim_{k\to\infty} f_k(x) = \varliminf_{k\to\infty} f_k(x) = \lim_{k\to\infty} g_k(x).$$

Es ist $g_k \le g_{k+1}$ und $\int g_k \le \int f_k \le A$. Mit Beppo-Levi gilt:

$$\int f = \lim_{k\to\infty} \int g_k \le \varliminf_{k\to\infty} \int f_k.$$

10.4 Der Satz von Fubini

10.4.1 Vorbemerkungen

(a) Sei $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$, $x \in \mathbb{R}^p$, $y \in \mathbb{R}^q$, $(x,y) \in \mathbb{R}^n$, $n = p+q$, $p,q \ge 1$. Sei $E \subseteq \mathbb{R}^n$. Dann ist

$$E_x := \{y\colon (x,y) \in E\} \subseteq \mathbb{R}^q$$

und

$$E_y := \{x\colon (x,y) \in E\} \subseteq \mathbb{R}^p.$$

(b) Sei $I \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Intervall, $I = I_1 \times I_2$ mit $I_1 \subseteq \mathbb{R}^p$ und $I_2 \subseteq \mathbb{R}^q$. Setze

$$\varphi(x,y) = \begin{cases} 1 & (x,y) \in I^0 \\ 0 & (x,y) \notin \bar{I} \\ \text{beschr} & (x,y) \in \partial I \end{cases}$$

und

$$\psi(x) := \int\limits_{\mathbb{R}^q} \varphi(x,y)\,dy = \begin{cases} m_q(I_2) & x \in I_1^0 \\ 0 & x \notin \bar{I}_1 \\ ? & x \in \partial I_1 \end{cases}.$$

Dabei ist m_q der q-dimensionale Inhalt und

$$\int\limits_{\mathbb{R}^p} \psi(x)\,dx = m_q(I_2) \cdot m_p(I_1).$$

Es gilt:

$$\int\limits_{\mathbb{R}^p} \left[\int\limits_{\mathbb{R}^q} \varphi(x,y)\,dy\right] dx = m_p(I_1) \cdot m_q(I_2) = m_n(I) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \varphi(x,y)\,d(x,y).$$

(c) Sei $\varphi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ Treppenfunktion. Dann gilt nach (b)

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \varphi(x,y)\,d(x,y) = \int\limits_{\mathbb{R}^p} \underbrace{\left[\int\limits_{\mathbb{R}^q} \varphi(x,y)\,dy\right]}_{\text{ex. f. ü.}} dx$$

.

10.4.2 Satz von Fubini

Sei $f \in L(\mathbb{R}^n)$. Dann existiert

$$\int\limits_{\mathbb{R}^q} f(x,y)\,dy$$

für fast alle $x \in \mathbb{R}^p$ und es gilt

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x,y)\,d(x,y) = \int\limits_{\mathbb{R}^p} \left[\int\limits_{\mathbb{R}^q} f(x,y)\,dy \right] dx$$

Beweis: In 10.4.5 ab der Seite 273.

10.4.3 Beispiele

(1) Für $n = 2$. Sei

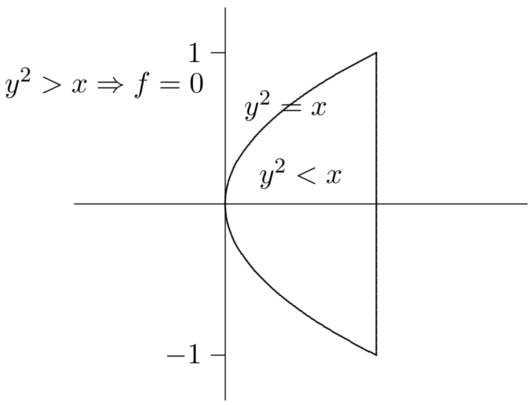
$$f(x,y) = \begin{cases} e^{-x-y} & x,y > 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

Dann ist

$$\begin{aligned} \int\limits_{R^2} f(x,y)\,d(x,y) &= 1 \text{ nach früherem Beispiel} \\ &= \int\limits_{\mathbb{R}} \left[\int\limits_{\mathbb{R}} f(x,y)\,dy \right] dx = \int\limits_0^\infty \left[\int\limits_0^\infty e^{-x-y}\,dy \right] dx \\ &= \int\limits_0^\infty e^{-x} \underbrace{\left[\int\limits_0^\infty e^{-y}\,dy \right]}_{=1} dx. \end{aligned}$$

(2) Für $n = 2$. Sei

$$f(x,y) = \begin{cases} x \cdot y^2 & y^2 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$



Die Grenzen, in denen integriert werden muß, sind $0 \le x \le 1$ und $-\sqrt{x} \le y \le \sqrt{x}$.

$$\begin{aligned}\int\limits_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\,d(x,y) &= \int\limits_0^1 \int\limits_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} xy^2\,dy\,dx = \int\limits_0^1 \frac{x\cdot y^3}{3}\Big|_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}}\,dx \\ &= \frac{2}{3}\int\limits_0^1 x^{5/2}\,dx = \frac{2}{3}\cdot\frac{2}{7}x^{7/2}\Big|_0^1 = \frac{4}{21}.\end{aligned}$$

(3) Für $n = 3$. Sei

$$E = \{(x,y,z)\colon x,y,z \ge 0,\ x+y+z \le 1\} \subseteq \mathbb{R}^3$$

$$f(x,y,z) = \begin{cases} x & (x,y,z) \in E \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

f ist fast überall stetig, also ist f meßbar.
Eine Lebesgue-integrierbare Majorante von f ist

$$g(x,y,z) = \begin{cases} 1 & (x,y,z) \in [0,1]^3 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

Die Grenzen der Integrale sind $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 1-x$, $0 \le z \le 1-x-y$. Es ist

$$\begin{aligned}\int\limits_{\mathbb{R}^3} f(x,y,z)\,d(x,y,z) &= \int\limits_0^1 \int\limits_0^{1-x} \int\limits_0^{1-x-y} x\,dz\,dy\,dx \\ &= \int\limits_0^1 \int\limits_0^{1-x} x(1-x-y)\,dy\,dx = \int\limits_0^1 \left[xy - x^2y - \frac{x}{2}y^2\right]_0^{1-x} dx \\ &\ \ \vdots \\ &= \frac{1}{24}.\end{aligned}$$

10.4.4 Hilfssatz zum Beweis des Satzes von Fubini

Sei $N \subseteq \mathbb{R}^n$ Nullmenge und $N_x = \{y\colon (x,y) \in N\} \subseteq \mathbb{R}^q$. Dann ist $N_x \subseteq \mathbb{R}^q$ Nullmenge für fast alle $x \in \mathbb{R}^p$.

Beweis: N ist Nullmenge. Also existieren Intervalle $I_1, I_2, \ldots \subseteq \mathbb{R}^n$ mit

$$\sum_{k=1}^{\infty} m_n(I_k) < 1,$$

und jedes $(x,y) \in N$ ist in unendlich vielen I_k enthalten. Setze

$$\varphi_k(x,y) = \begin{cases} 1 & (x,y) \in I_k \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

und

$$\Phi_k(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \varphi_k(x,y)\,dy = m_q((I_k)_x).$$

Dabei existiert Φ_k fast überall in $\mathbb{R}^p$.
Dann ist

$$\int\limits_{\mathbb{R}^p} \sum_{k=1}^{\ell} \Phi_k(x)\,dx = \sum_{k=1}^{\ell} \int\limits_{\mathbb{R}^p} \Phi_k(x)\,dx = \sum_{k=1}^{\ell} \int\limits_{\mathbb{R}^p} m_q((I_k)_x)\,dx$$
$$= \sum_{k=1}^{\ell} m_n(I_k) < 1.$$

Für die Folge $\left(\sum\limits_{k=1}^{\ell} \Phi_k\right)$ ist $\Phi_k \geq 0$. Die Folge ist wachsend und die Integralfolge ist ≤ 1. Daraus folgt mit Beppo-Levi

$$\sum_{k=1}^{\infty} \Phi_k(x) < +\infty \text{ fast überall in } \mathbb{R}^p.$$

Sei nun $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \Phi_k(x) < +\infty$. Zeige, daß N_x eine Nullmenge ist.
Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Dann existiert ein k_0, so daß

$$\sum_{k=k_0}^{\infty} \Phi_k(x) < \varepsilon.$$

Dann ist

$$N_x \subseteq \Bigg(\underbrace{\bigcup_{k=k_0}^{\infty} I_k}_{\oplus}\Bigg)_x \overset{\odot}{\subseteq} \bigcup_{k=k_0}^{\infty} \underbrace{(I_k)_x}_{\otimes}$$

$\oplus$, da x in unendlich vielen I_k ist.
$\odot$ als Aufgabe.
$\otimes$ sind Intervalle in $\mathbb{R}^q$.
Also ist

$$\sum_{k=k_0}^{\infty} m_q((I_k)_x) = \sum_{k=k_0}^{\infty} \Phi_k(x) < \varepsilon\checkmark$$

10.4.5 Beweis des Satzes von Fubini

Der Beweis wird dreigeteilt:

(a) Für Treppenfunktionen f. Schon erledigt in der Vorbemerkung (c).

(b) Für $f \in L^+$: Hier

(c) Allgemein für $f = f_1 - f_2$ mit $f_1, f_2 \in L^+$:$\checkmark$

Zeige nun die Behauptung für $f \in L^+$:
Sei $f \in L^+(\mathbb{R}^n)$ und φ_k seien Treppenfunktionen mit $\varphi_k \leq \varphi_{k+1}$ fast überall, $\varphi_k \to f$ fast überall für $k \to \infty$ und

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \varphi_k(x,y)\,d(x,y) \longrightarrow \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x,y)\,d(x,y).$$

Setze

$$N = \{(x,y) \in \mathbb{R}^n \colon \varphi_k(x,y) \not\to f(x,y)\}.$$

N ist Nullmenge in $\mathbb{R}^n$. Setze

$$M_1 = \{x \in \mathbb{R}^p \colon N_x \text{ ist keine } q\text{-dimensionale Nullmenge}\} \subseteq \mathbb{R}^p.$$

M_1 ist Nullmenge nach dem Hilfssatz.

$$\Phi_k(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^q} \varphi_k(x,y)\,dy$$

existiert fast überall in $\mathbb{R}^p$, also ist

$$M_2 = \{x \colon \Phi_k(x) \text{ ex. nicht für (irgend-)ein } k \in \mathbb{N}\}$$

Nullmenge in $\mathbb{R}^p$. Es gilt

$$\int\limits_{\mathbb{R}^p} \Phi_k(x)\,dx \overset{\substack{\text{Fubini}\\ \text{für TF}}}{=} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \varphi_k(x,y)\,d(x,y) \leq \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x,y)\,d(x,y) = \text{const.}$$

Sei nun $x \in \{x \colon \Phi_k(x) > \Phi_{k+1}(x)\}$. Dann ist

$$\int\limits_{\mathbb{R}^q} \varphi_k(x,y)\,dy > \int\limits_{\mathbb{R}^q} \varphi_{k+1}(x,y)\,dy.$$

Also ist $\{y \colon \varphi_k(x,y) > \varphi_{k+1}(x,y)\}$ keine Nullmenge. Nach dem Hilfssatz ist es Nullmenge für fast alle x. Also gilt fast überall $\Phi_k(x) \leq \Phi_{k+1}(x)$ und

$$M_3 = \{x \in \mathbb{R}^p \colon \Phi_k(x) > \Phi_{k+1}(x) \text{ für (irgend-)ein } k\}$$

ist Nullmenge. Also ist Φ_k fast überall monoton wachsend.
Mit Beppo-Levi gilt dann: $\Phi_k(x) \to g(x) < +\infty$ fast überall für $k \to \infty$, und

$$M_4 = \{x \in \mathbb{R}^p \colon \Phi_k(x) \text{ nicht konvergent oder } \to +\infty\}$$

ist Nullmenge.
$g \in L^+(\mathbb{R}^p)$, $\int \Phi_k \to \int g$.
Für $x \notin M_1$ gilt $\varphi_k(x,y) \to f(x,y)$. Es ist dann

$$\begin{aligned} g(x) &\overset{x\notin M_4}{=} \lim_{k\to\infty} \Phi_k(x) \overset{x\notin M_2}{=} \lim_{k\to\infty} \int\limits_{\mathbb{R}^q} \varphi_k(x,y)\,dy \\ &\overset{x\notin M_1}{=} \int\limits_{\mathbb{R}^q} f(x,y)\,dy. \end{aligned}$$

Also ist $g(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^q} f(x,y)$ fast überall in $\mathbb{R}^p$ und $g \in L(\mathbb{R}^p)$. Damit ist

$$\begin{aligned} \int\limits_{\mathbb{R}^p} \left(\int\limits_{\mathbb{R}^q} f(x,y)\,dy \right) dx &= \int\limits_{\mathbb{R}^p} g(x)\,dx = \lim_{k\to\infty} \int\limits_{\mathbb{R}^p} \Phi_k(x)\,dx \\ &= \lim_{k\to\infty} \int\limits_{\mathbb{R}^p} \left[\int\limits_{\mathbb{R}^q} \underbrace{\varphi_k(x,y)}_{\text{TF}}\,dy \right] dx \\ &= \lim_{k\to\infty} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \varphi_k(x,y)\,d(x,y) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x,y)\,d(x,y). \end{aligned}$$

10.4.6 Beispiel

für die Nichtanwendbarkeit des Satzes von Fubini für $n = 2$. Sei

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x-y}{(x+y)^3} & x, y > 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

Zeige (als Aufgabe)

$$\int \left(\int f(x, y)\, dy \right) dx \neq \int \left(\int f(x, y)\, dx \right) dy$$

Damit ist $f \notin L(\mathbb{R}^2)$.

10.4.7 Satz von Tonnelli

Sei $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ meßbar,

$$\int\limits_{\mathbb{R}^q} |f(x, y)|\, dy$$

existiere für fast alle x und

$$\int\limits_{\mathbb{R}^p} \left(\int\limits_{\mathbb{R}^q} |f(x, y)|\, dy \right) dx$$

existiere. Dann gilt der Satz von Fubini.

Analogie zum Doppelreihensatz 2.6.8, Seite 41:

$$\sum_{j=1}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{\infty} |a_{jk}| \right) < +\infty \Longrightarrow \sum_{(j,k)\in\mathbb{N}^2} a_{jk} = \sum_{j=1}^{\infty} \left(\sum_{j=1}^{\infty} a_{jk} \right).$$

Beweis: Zeige $f \in L(\mathbb{R}^n)$. Setze dafür

$$\varphi_k(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{in } [-k, k]^n \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

und

$$f_k(x, y) = \min(k, |f(x, y)| \cdot \varphi_k(x, y)).$$

Es ist $f_k \in L(\mathbb{R}^n)$, denn f_k ist meßbar und hat $k \cdot \varphi_k$ als integrierbare Majorante. Außerdem ist fast überall $f_k \leq f_{k+1}$. Dann ist

$$\begin{aligned} \int f_k(x, y)\, d(x, y) &= \int\limits_{\mathbb{R}^p} \int\limits_{\mathbb{R}^q} \underbrace{f_k(x, y)}_{\substack{\leq |f(x,y)|\cdot\varphi_k(x,y) \\ \leq |f(x,y)|}} \, dy\, dx \\ &\leq \int\limits_{\mathbb{R}^p} \int\limits_{\mathbb{R}^q} |f(x, y)|\, dy\, dx = \text{const.} \end{aligned}$$

Mit Beppo-Levi gilt dann

$$|f(x, y)| = \underbrace{\lim_{k\to\infty} f_k(x, y)}_{\in L(\mathbb{R}^n)} < +\infty \text{ fast überall.}$$

Damit ist $|f| \in L(\mathbb{R}^n)$. Zusammen mit der Voraussetzung, daß f meßbar ist, folgt dann $f \in L(\mathbb{R}^n)$.

10.4.8 Beispiel

Sei
$$E = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon z > 1,\, x^2 + y^2 < \frac{1}{z^2} \right\}$$
und
$$f(x,y,z) = \begin{cases} 1 & (x,y,z) \in E \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$
Zu berechnen ist
$$\int f(x,y,z)\, d(x,y,z).$$
Es ist
$$E_z = \begin{cases} \{(x,y) \colon x^2 + y^2 < \frac{1}{z^2}\} & \text{für } z > 1 \\ \emptyset & \text{für } z \le 1 \end{cases}.$$
f ist meßbar und f ist unstetig auf ∂E. ∂E ist Nullmenge im $\mathbb{R}^3$ (später).
$$\begin{aligned} \int\limits_{\mathbb{R}^3} f(x,y,z)\, d(x,y,z) &= \int\limits_{\mathbb{R}} \int\limits_{\mathbb{R}^2} f(x,y,z)\, d(x,y)\, dz \\ &= \int\limits_{\mathbb{R}} \int\limits_{\mathbb{R}^2} 1 \cdot \chi_{E_z}(x,y) d(x,y)\, dz = \int\limits_1^\infty \pi \frac{1}{z^2}\, dz = \pi. \end{aligned}$$
Später wird gesagt: Der Inhalt von E ist π.

10.5 Meßbare Mengen

10.5.1 Def.: Charakteristische Funktion, Meßbarkeit

Sei $E \subseteq \mathbb{R}^n$. Dann heißt
$$\chi_E(x) = \begin{cases} 1 & x \in E \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$
charakteristische Funktion von E. E heißt *meßbar*, wenn χ_E meßbar ist. Ist $\chi_E \in L(\mathbb{R}^n)$, so heißt
$$m(E) := \int \chi_E$$
(Lebesguesches) Maß von E.

10.5.2 Bemerkungen

(a) Ist E meßbar, aber χ_E nicht integrierbar, so setzt man $m(E) = +\infty$.

(b) Ist $E_1 \subseteq E_2$ mit meßbarem E_2, dann ist $m(E_1) \le m(E_2)$, da $\chi_{E_1} \le \chi_{E_2}$ ist.

(c) Ist I Intervall, dann ist $m(I)$ der elementare Inhalt von I.

(d) $N \subseteq \mathbb{R}^n$ ist genau dann Nullmenge, wenn $m(N) = 0$ ist.

(e) Offene und abgeschlossene Mengen sind meßbar.

(f) (i) ∂E ist nicht immer eine Nullmenge. Z. B. sei $E = \mathbf{Q}^n$. Dann ist $\partial E = \mathbb{R}^n$.
  (ii) ∂E sei Nullmenge, E^0, $\bar{E}$ sind meßbar und es ist $E^0 \subseteq E \subseteq \bar{E}$. Frage: Wenn F meßbar und N Nullmenge ist, ist dann $E = F \cup N$ meßbar?
  Es ist $\chi_F = \chi_E$ fast überall, also ist E meßbar.

Beweis:

(d) **„$\Rightarrow$“:** Sei N Nullmenge. Setze die Treppenfunktion $\varphi_k(x) = 0$ überall. Es ist $\varphi_k(x) \to 0 = \chi_N(x)$ fast überall für $k \to \infty$ und $\int \varphi_k = 0$. Mit Beppo-Levi folgt

$$m(N) = \int \chi_N = \lim_{k\to\infty} \int \varphi_k = 0.$$

„$\Leftarrow$“: Setze $\varphi_k = k \cdot \chi_N$. Es ist $\varphi_k \leq \varphi_{k+1}$ überall und

$$\int \varphi_k = k \int \chi_N = 0.$$

Beppo-Levi: $\lim\limits_{k\to\infty} \varphi_k(x) < +\infty$ fast überall $\iff x \notin N$.
Also ist N eine Nullmenge.

(e) Sei $E \subseteq \mathbb{R}^n$ offen. Früher wurde gezeigt: Wenn E beschränkt ist, ist χ_E fast überall stetig, also meßbar. Zu offenem E ist

$$E_k = E \cap (-k, k)^n$$

meßbar und $\chi_{E_k} \to \chi_E$. Damit ist χ_E auch meßbar. Zu abgeschlossenem E ist $F = \mathbb{R}^n \setminus E$ offen und

$$\chi_E = 1 - \chi_F$$

ist als Differenz zweier meßbarer Funktionen ebenfalls meßbar.

10.5.3 Satz

Ist $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ meßbar und $c \in \mathbb{R}$, so ist

$$E = \{x\colon f(x) < c\}$$

meßbar. Dies gilt ebenso für $\leq$, $>$ und $\geq$.

Beweis: Setze

$$\varphi_k(x) = \min(1, k \cdot (c - f(x))^+).$$

φ_k ist meßbar.
Für $x \in E$ ist $k \cdot (c - f(x))^+ > 1$ für $k \geq k_0$, d. h. $\varphi_k(x) = 1 = \chi_E(x)$ für $k \geq k_0$. Für $x \notin E$ ist $k \cdot (c - f(x))^+ = 0$, d. h. $\varphi_k(x) = 0$ für $k \in \mathbb{N}$ und $\varphi_k(x) \to 0 = \chi_E(x)$.
Da $\varphi_k \to \chi_E$ ist χ_E meßbar.
Aufgabe: Beweis für $\leq$.

10.5.4 Prinzip von Cavalierei

Sei $E \subseteq \mathbb{R}^n$ meßbar mit $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$, $(x, y) \in \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$ und $m(E) < \infty$. Sei

$$E_x := \{y\colon (x, y) \in E\} \subseteq \mathbb{R}^q.$$

Dann sind fast alle E_x meßbar in $\mathbb{R}^q$ mit

$$m_q(E_x) := \int \chi_{E_x}(y)\, dy < +\infty$$

und

$$m_n(E) = \int m_q(E_x)\, dx.$$

Umgekehrt: Ist $m_q(E_x) < +\infty$ fast überall, so gilt

$$m_n(E) = \int m_q(E_x)\, dx,$$

falls der rechte Term $< +\infty$ ist.

Beweis: Es ist

$$m_n(E) = \int \chi_E(x, y)\, d(x, y).$$

Mit Fubini gilt:

$$x \longmapsto \int \chi_E(x, y)\, dy < +\infty$$

fast überall und in $L(\mathbb{R}^p)$. Außerdem ist

$$m_n(E) = \int\limits_{\mathbb{R}^p} m_q(E_x)\, dx = \int\limits_{\mathbb{R}^p} \int \chi_{E_x}(y)\, dy\, dx.$$

Die Umkehrung entspricht dem Satz von Tonnelli, da $m_q > 0$ ist.

10.5.5 Definition: Integrierbarkeit über E

Sei $E \subseteq \mathbb{R}^n$ meßbar und $f\colon E \to \mathbb{R}$ eine Funktion. f heißt *integrierbar* über E, $f \in L(E)$, wenn ihre triviale Fortsetzung

$$f_0(x) = \begin{cases} f(x) & x \in E \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

in $L(\mathbb{R}^n)$ ist. Man setzt

$$\int\limits_E f = \int\limits_E f(x)\, dx := \int f_0.$$

10.5.6 Definition: Ordinatenmengen

Sei $E \subseteq \mathbb{R}^n$ meßbar und $F\colon E \to [0, \infty)$. Dann heißt

$$E(f) := \{(x, y)\colon x \in E,\ 0 \leq y \leq f(x)\} \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$$

Ordinatenmenge. Analoges gilt für $<, \leq$; $\leq, <$ und $<, <$.
Analog seien auch $f, g\colon E \to \mathbb{R}$ mit $f(x) \leq g(x)$:

$$E(f, g) = \{(x, y)\colon x \in E, f(x) \leq [<] y \leq [<] g(x)\}.$$

10.5.7 Satz

Sind f und g meßbar, so ist auch $E(f, g)$ meßbar.
Ist $g - f \in L(E)$, so ist

$$m_{n+1}(E(f, g)) = \int E(g(x) - f(x))\, dx.$$

Beweis: Hier für $E(g) = E(0, g)$.
Zeige die Meßbarkeit. Dann wende Cavalieri an, da

$$(E(g))_x = \{y\colon 0 \le y \le g(x)\}$$
$$m_1((E(g))_x) = g(x).$$

Behauptung:

$$\chi_{E(g)}(x, y) = \chi_E(x) \cdot \lim_{k\to\infty} \varphi_k(x, y)$$

mit

$$\varphi_k(x, y) = \min\left(1, k^2\left[\left(y + \frac{1}{k}\right)\left(g(x) + \frac{1}{k} - y\right)\right]^+\right).$$

Dabei ist $\varphi_k(x, y)$ meßbar.
Für $x \notin E$ ist $\chi_{E(g)}(x, y) = 0$ für alle $y \in \mathbb{R}$. Für $x \in E$ gilt:
Wenn $y > g(x)$ ist, ist

$$g(x) + \frac{1}{k} - y < 0 \text{ für } k \ge k_0$$

und $y + \frac{1}{k} > 0$.
Damit ist $[\ldots]^+ = 0$ und $\varphi_k(x, y) = 0$.
Ist $y < 0$ dann ist genauso $\varphi_k(x, y) = 0$ für $k \ge k_0$.
Für $0 \le y \le g(x)$ und $(x, y) \in E(g)$ ist

$$y + \frac{1}{k} \ge \frac{1}{k}$$

und

$$g(x) + \frac{1}{k} - y \ge \frac{1}{k}.$$

Damit ist $[\ldots]^+ \ge \frac{1}{k^2}$ und damit $\varphi_k(x, y) = 1$, $\chi_{E(g)} = 1$.
Zusammen folgt, daß $\chi_{E(g)}$ meßbar.
Aufgabe: Führe den Beweis für $\{(x, y)\colon 0 < y \le g(x)\}$.

10.5.8 Folgerung

Ist $f \in R([a, b])$, dann ist graph f eine Nullmenge im $\mathbb{R}^2$ (vergleiche mit 10.1.3, Punkt (f)).
Jetzt: Ist $f\colon E \to \mathbb{R}$ meßbar für meßbares $E \subseteq \mathbb{R}^n$, so ist

$$\operatorname{graph} f = \{(x, f(x))\colon x \in E\} \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$$

eine $(n+1)$-dimensionale Nullmenge.

$$\operatorname{graph} f = E(f, f)$$

ist meßbar mit dem Maß

$$\int_E f(x) - f(x)\, dx = 0.$$

10.5.9 Bemerkung

zum Beispiel 10.4.8, Seite 276. Es ist

$$E = \left\{(x, y, z) \colon z > 1,\, x^2 + y^2 < \frac{1}{z^2}\right\}$$

$$F = \{(x, y) \colon x^2 + y^2 < 1\}.$$

Es ist $f(x, y) = 1$ auf E und $g(x, y) = \frac{1}{x^2+y^2}$ auf $E \setminus \{0\}$.
$E = F(f, g)$ ist meßbar, da f und g meßbar sind.
Dabei ist ∂E eine Nullmenge.

10.5.10 Beispiel: Maß der n-dimensionalen Kugel

Sei

$$K_n(r) := \{x \in \mathbb{R}^n \colon \|x\| \leq r\}$$

die n-dimensionale r-Kugel. Dann ist

$$m(K_n(r)) = c_n \cdot r^n$$

mit

$$\begin{aligned} c_1 &= 2 \\ c_{n+1} &= 2 \cdot c_n \cdot \int_0^{\pi/2} (\cos t)^{n+1}\, dt. \end{aligned}$$

Zum Beispiel ist

$$\begin{aligned} c_2 &= \pi \\ c_3 &= \frac{4}{3}\pi. \end{aligned}$$

Ohne Beweis gilt

$$c_n = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(1 + \frac{n}{2})}.$$

Beweis: Durch Induktion nach n:

$n = 1$: ✓

$n \mapsto n + 1$: Sei $\mathbb{R}^{n+1} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ und $(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$.
Es ist

$$\begin{aligned} K_{n+1}(r) &= \{(x, y) \colon \|x\|^2 + y^2 \leq r^2\} \\ &= \{(x, y) \colon \|x\| \leq r,\, |y| \leq \sqrt{r^2 - \|x\|^2}\} \end{aligned}$$

und

$$(K_{n+1}(r))_y = K_n(\sqrt{r^2 - y^2}).$$

Mit dem Prinzip von Cavalieri gilt dann

$$\begin{aligned} m_{n+1}(K_{n+1}(r)) &= \int_{-r}^{r} m_n((K_{n+1}(r))_y)\,dy = \int_{-r}^{r} c_n \left(\sqrt{r^2-y^2}\right)^n\,dy \\ &= 2c_n \int_0^r (r^2-y^2)^{n/2}\,dy = \left|\begin{matrix} y = r\sin t \\ dy = r\cos t\,dt \end{matrix}\right| \\ &= 2c_n \int_0^{\pi/2} r^n(\cos t)^n \cdot r \cdot \cos t\,dt = 2c_n r^{n+1} \int_0^{\pi/2} (\cos t)^{n+1}\,dt \\ &= c_{n+1} \cdot r^{n+1}. \end{aligned}$$

Zeige nun $c_n \to 0$ für $n \to \infty$:

$$c_{n+1} = c_n \cdot 2 \int_0^{\pi/2} (\cos t)^{n+1}\,dt$$

Dabei ist $\int_0^{\pi/2} (\cos t)^{n+1}\,dt \to 0$.
Für $n \geq n_0$ ist $c_{n+1} \leq \frac{2}{3} c_n$.

10.5.11 Rotationskörper im $\mathbb{R}^3$

Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $f\colon I \to [0,\infty)$. Setze den Rotationskörper

$$R = \{(x,y,z)\colon x \in I,\ y^2+z^2 \leq (f(x))^2\}.$$

Wenn $f^2 \in L(\mathbb{R})$ ist, dann ist

$$m_3(R) = \pi \int_I (f(x))^2\,dx.$$

Wende den Satz von Cavalieri auf $\mathbb{R}$ an: Betrachte R_x für $x \in I$:

$$\begin{gathered} R_x = \{(y,z)\colon y^2+z^2 \leq (f(x))^2\} \\ m_2(R_x) = \pi(f(x))^2 \\ m_3(R) = \pi \int_I (f(x))^2\,dx \end{gathered}$$

10.5.12 Satz

Sind $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ meßbar, so sind auch $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$ und insbesondere $\mathbb{R}^n \setminus B$ meßbar und es gilt

$$m(A \cup B) + m(A \cap B) = m(A) + m(B).$$

Beweis:

$$\begin{aligned} \chi_{A\setminus B} &= \chi_A \cdot (1-\chi_B) \\ \chi_{A\cap B} &= \chi_A \cdot \chi_B \\ \chi_{A\cup B} &= \chi_A + \chi_B - \chi_{A\cap B} \end{aligned}$$

sind allesamt meßbar.
Also ist

$$\chi_{A\cup B} + \chi_{A\cap B} = \chi_A + \chi_B$$
$$\int \chi_{A\cup B} + \int \chi_{A\cap B} = \int \chi_A + \int \chi_B.$$

Aufgabe: Zeige dies per Induktion auch für endlich viele $A_1, \dots, A_m$.

10.5.13 Satz

Sind $A_1, A_2, \dots \subseteq \mathbb{R}^n$ meßbar und

$$V = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \text{ und } D = \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k,$$

so sind V und D meßbar, und es ist

$$m(V) \leq \sum_{k=1}^{\infty} m(A_k).$$

Speziell gilt:

(a) $m(V) = \lim\limits_{k\to\infty} m(A_k)$, falls $A_1 \subseteq A_2 \subseteq A_3 \subseteq \cdots$.

(b) $m(D) = \lim\limits_{k\to\infty} m(A_k)$, falls $A_1 \supseteq A_2 \supseteq A_3 \supseteq \cdots$.

(c) $m(V) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} m(A_k)$, falls $A_j \cap A_k = \emptyset$ oder Nullmenge für $i \neq k$ ist (σ-Additivität des Lebesguemaßes).

Beweis: $D_k = A_1 \cap \cdots \cap A_k$ und $V_k = A_1 \cup \cdots \cup A_k$ sind meßbar mit

$$\chi_{D_k} = \chi_{A_1} \dots \chi_{A_k} \text{ und } \chi_{V_k} = \min(1, \chi_{A_1} + \cdots + \chi_{A_k}).$$

$\chi_D = \lim\limits_{k\to\infty} \chi_{D_k}$ ($\searrow$) ist meßbar und
$\chi_V = \lim\limits_{k\to\infty} \chi_{V_k}$ ($\nearrow$) ist meßbar.

$$\begin{aligned} m(V) = \int \chi_V &= \lim_{k\to\infty} \int \chi_{V_k} \text{ (Beppo-Levi, falls konvergent)} \\ &\leq \lim_{k\to\infty} \left(\int \chi_{A_1} + \cdots + \int \chi_{A_k} \right) \leq \sum_{j=1}^{\infty} m(A_j). \end{aligned}$$

(a) $V_k = A_k$: $m(V) = \lim_{k\to\infty} m(A_k)$

(b) $D_k = A_k$: $m(D) = \lim_{k\to\infty} m(D_k)$

(c) **„$\leq$“:** siehe oben ✓

„$\geq$“: Es ist $\chi_{A_1} + \dots + \chi_{A_k}$ nur in einer Nullmenge, also ist fast überall

$$\chi_{V_k} = \chi_{A_1} + \dots + \chi_{A_k}.$$

Damit ist

$$m(V_k) = \sum_{j=1}^{k} m(A_j)$$

und für $k \to \infty$ ist

$$m(V) = \sum_{j=1}^{\infty} m(A_j).$$

10.5.14 Beispiel einer nicht meßbaren Menge in $\mathbb{R}$

Die Relation

$$x \sim y :\iff x - y \in \mathbf{Q}$$

ist eine Äquivalenzrelation mit den Äquivalenzklassen $[x]$. Es ist entweder $[x] = [y]$ oder $[x] \cap [y] = \emptyset$. Sei A Vertretersystem in $[0, 1)$, d. h. zu jedem $x \in \mathbb{R}$ gibt es genau ein $\xi \in A$ mit $\xi \in [x]$, sprich $\xi \sim x$ (Auswahlaxiom, äquivalent zum Lemma von Zorn, Wohlordnungssatz).
Die Menge A ist nicht meßbar.

Beweis: Setze

$$A + r := \{a + r \colon a \in A,\, r \in \mathbf{Q},\, 0 \leq r < 1\}$$

und

$$A_r := \{a + r \colon a \in A,\, a + r < 1\} \cup \{a + r - 1 \colon a \in A,\, a + r \geq 1\}.$$

Zeige

(1) $A_r \cap A_s = \emptyset$ für $r \neq s$.

(2) $\bigcup_{r \in [0,1)} A_r = [0, 1)$.

Wenn dann nun A meßbar wäre, dann auch $A + r$ mit $m(A + r) = m(A)$.
Ebenso wäre $m(A_r) = m(A) = m(A_0)$. Damit ist

$$1 = m([0, 1)) = \sum_{r \in [0,1)} m(A_r) = \sum_{r \in [0,1)} m(A) = 0.$$

Widerspruch! Also kann A nicht meßbar sein.

ad (1): Sei $x \in A_r \cap A_s$ mit $0 \leq r, s < 1$ und $r \neq s$.
Es existieren $a \in A$ und $b \in A$ mit

$$x = a + r \text{ oder } a + r - 1$$
$$x = b + s \text{ oder } b + s - 1.$$

Subtraktion liefert

$$a - b = s - r \in \mathbf{Q}.$$

Damit ist $a \sim b$.
Daraus folgt nach der Konstruktion von A, daß $a = b$ und damit $r = s$ sein muß. Dies ist ein Widerspruch! Also muß $A_r \cap A_s$ für $r \neq s$ eine leere Menge sein.

ad (2): **„⊆“:**

$$\bigcup_{r\in[0,1)} A_r \subseteq [0,1)$$

ist klar, weil $A_r \subseteq [0,1)$ ist.

„⊇“: Sei $x \in [0,1)$: $x \sim a$ für ein $a \in A$.
Damit ist $x - a = r \in \mathbf{Q}$ und $-1 < x - a < 1$, $x \in A + r$, $x \in A_r$.
Für $0 \leq r < 1$ gilt: $x \in A_r$.
Für $-1 < r < 0$ gilt: $x = a + r + 1 - 1 \in A_s = A_{r+1}$ mit $s = r + 1 \in (0,1)$, weil $a + s \geq 1$ ist.

10.5.15 Satz, absolute Stetigkeit des L-Integrals

Sei $f \in L(\mathbb{R}^n)$ und $\varepsilon > 0$ beliebig. Dann gibt es

(a) $f = g + h$ mit $g, h \in L(\mathbb{R}^n)$, g beschränkt und $\int |h| < \varepsilon$.

(b) ein $\delta > 0$ mit

$$\int_E |f| < \varepsilon$$

für jede meßbare Menge mit $m(E) < \delta$
(Absolute Stetigkeit des Lebesgue-Integrals).

Beweis:

1. Setze

$$f_k = \begin{cases} k & \text{wo } f > k \\ -k & \text{wo } f < -k \\ f & \text{sonst} \end{cases}.$$

Es ist $|f_k| \leq k$, $|f_k| \leq |f|$ und $f_k \to f$ überall für $k \to \infty$.
Nach dem Satz von Lebesgue gilt für $k \to \infty$

$$\int f_k \to \int f.$$

Es ist auch aus demselben Grund für $k \to \infty$

$$\int |f - f_k| \to 0,$$

denn es ist $|f - f_k| \leq 2|f|$.
Wähle k so, daß $\int |f - f_k| < \varepsilon$ ist.
$g = f_k$ ist beschränkt durch k. Setze $h = f - f_k$. Dann ist $\int |h| < \varepsilon$ und $f = g + h$.

2. Sei $f = g + h$ mit $|g| \leq M$ und $\int |h| < \varepsilon/2$ (geht nach Teil (a)) und $\delta = \frac{\varepsilon}{2M}$.
$E \subseteq \mathbb{R}^n$ sei meßbar und $m(E) < \delta$. Dann ist

$$\begin{aligned} \int_E |f| &< \int_E |g| + \int_E |h| \\ &\leq M \cdot m(E) + \int_{\mathbb{R}^n} |h| < M \cdot \delta + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

10.6 Die Transformationsformel

10.6.1 Motivation

Im Abschnitt 5.3.6 auf der Seite 105 wird gezeigt:
Für $f \in R([a,b])$, $\Phi\colon [\alpha,\beta] \to [a,b]$, bijektiv und stetig differenzierbar, gilt die Substitutionsregel:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(\Phi(t)) \cdot \Phi'(t)\,dt.$$

Was gibt es für Möglichkeiten beim Lebesgue-Integral?

10.6.2 Die Transformationsformel

Seien $U, V \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $\Phi\colon U \to V$ ein Diffeomorphismus (d. h. Φ ist bijektiv und Φ, Φ^{-1} sind stetig differenzierbar). Dann gilt

$$\int_V f(x)\,dx = \int_U f(\Phi(t)) \cdot |\det \Phi'(t)|\,dt,$$

wenn eine von beiden Seiten als Lebesgue-Integral existiert.

$$\left(\int_V g(\Phi^{-1}(x)) \cdot |\det(\Phi^{-1})'(x)|\,dx = \int_U g(t)\,dt \right)$$

Beweis: Später.

10.6.3 Satz (Spezialfall von 10.6.2)

Sei A eine $n \times n$-Matrix, $b \in \mathbb{R}^n$ und $\Phi(x) := Ax + b$. Dann gilt:

$$m(\Phi(E)) = |\det A| \cdot m(E) \tag{10.1}$$

für jedes meßbare $E \subseteq \mathbb{R}^n$ mit $m(E) < \infty$.

Beweis:

(1) Sei $\Phi(x) = x + b$ eine Verschiebung und E ein Intervall mit der zugehörigen charakteristischen Funktion χ_E. $\Phi(E)$ ist ebenfalls ein Intervall mit $m(\Phi(E)) = 1 \cdot m(E)$. Es ist $1 = |\det(\text{Einheitsmatrix})|$. (10.1) gilt für E =endl. Vereinigung von Intervallen.

$$\text{(10.1)} \iff \int \chi_{\Phi(E)}(x)\,dx = \int_E \chi_E(x)\,dx$$

$$\chi_{\Phi(E)}(x) = \chi_E(x-b)$$

$$\text{(10.1)} \iff \int \chi_E(x-b)\,dx = \int \chi_E(x)$$

E =endl. Vereinigung von Intervallen.
Grenzübergang: Für jede meßbare Menge E mit $m(E) < \infty$.

$$[E \text{ meßbar} \iff \chi_E \text{ meßbar} \iff \exists \varphi_k \text{ TF}\colon \varphi_k \to \chi_E \text{ f.ü.}]$$

(2) Sei $\Phi(x) = Ax$:

(a) Sei $\det A = 0$. Dann ist $\Phi(E) \subseteq H$. H ist Hyperebene des $\mathbb{R}^n$, also ist $m(\Phi(E)) \leq m(H) = 0$ und $|\det A| \cdot m(E) = 0$.

(b) Sei

$$A = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

E sei Intervall mit den Kantenlängen $\ell_1, \ldots, \ell_n$. Dann ist $\Phi(E)$ ein Intervall mit den Kantenlängen $|\lambda_1|\ell_1, \ldots, |\lambda_n|\ell_n$.

$$m(\Phi(E)) = |\lambda_1 \ldots \lambda_n| \cdot \ell_1 \ldots \ell_n = |\det A| \cdot m(E)$$

$$\int\limits_{\Phi(E)} \chi_E(x)\, dx = \left(\int\limits_E \chi_E(x)\, dx \right) \cdot |\det A|$$

Wie unter (1) schließt man auf meßbare Mengen E mit $m(E) < \infty$.

(c) Sei nun $\Phi(x) = Ax$ mit $\det A \neq 0$.
Setze $W = [0,1]^n$ der Einheitswürfel und

$$\alpha(A) := m(\Phi(W)).$$

Zeige, daß die folgende Gleichung gilt:

$$\alpha(A) = |\det A|.$$

Setze

$$\begin{aligned} E = a + [0,\ell]^n &= \{a + x \colon 0 \leq x_\nu \leq \ell \text{ für } \nu = 1, \ldots, n\} \\ &= a + \Psi(W). \end{aligned}$$

Dabei ist

$$\Psi(x) = \ell x$$

und damit

$$\begin{aligned} m(\Phi(E)) &\overset{(1)}{=} m(\Phi(\Psi(W))) = m(\Psi(\Phi(W))) \\ &\overset{(b)}{=} \underbrace{\ell^n}_{=m(E)} \cdot \underbrace{m(\Phi(W))}_{=\alpha(A)} = \alpha(A) \cdot m(E). \end{aligned}$$

Genauer gesagt, ist für Würfel $E \subseteq \mathbb{R}^n$

$$m(\Phi(E)) = \alpha(A) \cdot m(E).$$

Dasselbe gilt für meßbares E (Zeige dies als Aufgabe. Schließe dabei von Würfeln auf Intervalle).
Wenn E offen ist, dann ist E die Vereinigung von sich nicht überlappenden Würfeln.
Die Beziehung $\alpha(A) = |\det A|$ ist richtig für

(i) $\det A = 0$. Dies wurde in (2a) gezeigt.
(ii) $A = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$. Dies wurde in (2b) gezeigt.

(iii) orthogonales A ($A^TA = E_n$ = Eiheitsmatrix). Dies wird in (d) gezeigt.

(iv) beliebiges A mit $\det A \neq 0$. Dies wird in (e) gezeigt.

(d) Sei nun A orthogonal, d.h. es ist $A^TA = E_n$.
Setze $E = K(0,1) = \{x \in \mathbb{R}^n \colon \|x\| \leq 1\}$.
$A^T \cdot A = E_n \Rightarrow \Phi(E) = E$

$$m(\Phi(E)) = m(E) = \alpha(A) \cdot m(E)$$

$\Rightarrow \alpha(A) = 1$

$$1 = \det A \cdot \det A^T = (\det A)^2$$

$\Rightarrow |\det A| = 1$.

(e) Sei nun A beliebig mit $\det A \neq 0$.
$A^T \cdot A$ ist symmetrisch und positiv definit, also ist $A^T \cdot A = S^T \cdot D \cdot S$ mit einer orthogonalen Matrix S und $D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ mit $\lambda_1, \ldots, \lambda_n > 0$, den Eigenwerten von $A^T \cdot A$ (Hauptachsentransformation für $A^T \cdot A$).
Setze

$$\Delta = \operatorname{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \ldots, \sqrt{\lambda_n}) \qquad \Delta^2 = D.$$

Dann ist

$$\Delta^{-1} \cdot D \cdot \Delta^{-1} = E_n$$

und

$$S \cdot A^T \cdot A \cdot S^T = S \cdot (S^T \cdot D \cdot S) \cdot S^T = D = \Delta \cdot \Delta.$$

Es ist

$$E_n = \Delta^{-1} \cdot D \cdot \Delta^{-1} = \underbrace{\Delta^{-1} \cdot S \cdot A^T}_{:=S_1} \cdot A \cdot S^T \cdot \Delta^{-1}$$

$$S_1 \cdot S_1^T = \Delta^{-1} \underbrace{S \cdot A^T \cdot A \cdot S^T}_{=D} \cdot \Delta^{-1} = E_n$$

Also ist S_1 orthogonal und

$$E_n = S_1 \cdot A \cdot S^T \cdot \Delta^{-1}$$

$$\underbrace{\alpha(E)}_{1} \overset{(\not\equiv)}{=} \underbrace{\alpha(S_1)}_{1} \cdot \alpha(A) \cdot \underbrace{\alpha(S^T)}_{1} \cdot \underbrace{\alpha(\Delta^{-1})}_{|\det(\Delta^{-1})|}$$

$$\Rightarrow \alpha(A) = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\lambda_1} \cdots \frac{1}{\lambda_1}}} = \sqrt{\lambda_1 \ldots \lambda_n}.$$

Es ist

$$|\det A| = \sqrt{\det(A^T \cdot A)} = \sqrt{\lambda_1 \ldots \lambda_n}$$

Also ist $\alpha(A) = |\det a|$.

Nachtrag zu ($\not\equiv$):
Seien A und B $n \times n$-Matrizen. Dann ist

$$\alpha(AB) = \alpha(A)\alpha(B).$$

Beweis: $\alpha(AB)$, $\Phi(x) = Ax$, $\Psi(x) = Bx$.
$m(\Phi(E)) = \alpha(A) \cdot m(E)$:

$$\alpha(AB) \cdot m(E) = m(\Phi(\Psi(E))) = \alpha(A) \cdot m(\Psi(E)) = \alpha(A) \cdot \alpha(B) \cdot m(E).$$

Also ist $\alpha(AB) = \alpha(A) \cdot \alpha(B)$.

Bis hierhin ist bewiesen, daß für $\Phi(x) = Ax + b$ gilt: $m(\Phi(E)) = |\det A| \cdot m(E)$.

10.6.4 Hilfssatz 1

Sei $\Phi \in C^1(K(0,\varrho), \mathbb{R}^n)$ und W_k Folge von Würfeln mit $0 \in W_k$ und $\operatorname{diam} W_k \to 0$. Dabei ist $\operatorname{diam} E = \sup\{\|x-y\| : x, y \in E\}$ der Durchmesser von E. Dann gelten folgende Aussagen:

(a) Für $k \to \infty$ ist

$$\frac{1}{m(W_k)} \int\limits_{W_k} |\det \Phi'(x)| \to |\det \Phi'(0)|.$$

(b) Für $k \to \infty$ ist

$$\frac{m(\Phi(W_k))}{m(W_k)} \to |\det \Phi'(0)|.$$

Beweis:

(a) Als Aufgabe. Sogar für stetige f gilt

$$\frac{1}{m(W_k)} \int\limits_{W_k} f(x)\, dx \to f(0).$$

(b) (i) Sei zuerst $\Phi'(0) = E_n$ die Einheitsmatrix im $\mathbb{R}^n$, d.h. es ist $\Phi(x) = x + r(x) \cdot \|x\|$ mit $r(x) \to 0$ für $x \to 0$.
Sei nun $\varepsilon > 0$ und $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$. Dazu existiert ein $\delta > 0$ mit $\|r(x)\| < \varepsilon$ für $\|x\| < \delta$.
Für $k \geq k_0$ gilt: $W_k \subseteq K(0,\delta)$.
Sei nun $y = \Phi(x)$ mit $x \in W_k$. Dann ist

$$y_\nu = x_\nu + \underbrace{\|x\|}_{\leq \sqrt{n} \cdot \ell_k} \cdot \underbrace{r_\nu(x)}_{|\cdot| < \varepsilon}$$

Für W_k gilt dann

$$\begin{aligned}\Phi(W_k) \subseteq {} & [-\sqrt{n} \cdot \ell_k \cdot \varepsilon + a_1^{(k)}, \sqrt{n} \cdot \ell_k \cdot \varepsilon + a_1^{(k)} + \ell_k] \\ & \times \cdots \times [-\sqrt{n} \cdot \ell_k \cdot \varepsilon + a_n^{(k)}, \sqrt{n} \cdot \ell_k \cdot \varepsilon + a_n^{(k)} + \ell_k]\end{aligned} \tag{10.2}$$

und

$$\begin{aligned}\Phi(W_k) \supseteq {} & [+\sqrt{n} \cdot \ell_k \cdot \varepsilon + a_1^{(k)}, -\sqrt{n} \cdot \ell_k \cdot \varepsilon + a_1^{(k)} + \ell_k] \\ & \times \cdots \times [+\sqrt{n} \cdot \ell_k \cdot \varepsilon + a_n^{(k)}, -\sqrt{n} \cdot \ell_k \cdot \varepsilon + a_n^{(k)} + \ell_k]\end{aligned} \tag{10.3}$$

Also

$$\ell_k^n \cdot (1 - 2\sqrt{n} \cdot \varepsilon)^n \leq m(\Phi(W_k)) \leq \ell_k^n \cdot (1 + 2\sqrt{n} \cdot \varepsilon)^n$$

$$\underbrace{(1 - 2\sqrt{n} \cdot \varepsilon)^n - 1}_{> -\text{const} \cdot \varepsilon} \leq \frac{m(\Phi(W_k))}{m(W_k)} - 1 \leq \underbrace{(1 + 2\sqrt{n} \cdot \varepsilon)^n - 1}_{< \text{const} \cdot \varepsilon}$$

für $k \geq k_0$.

$$\Rightarrow \frac{m(\Phi(W_k))}{m(W_k)} \to 1 = |\det \Phi'(0)|$$

für $k \to \infty$.

(ii) Allgemeiner Fall. Sei $\Phi'(0) = A$. Zuerst sei $\det A \neq 0$.
Sei $\Phi(x) = A^{-1} \cdot \Phi(x)$. Damit ist $\Phi'(0) = E_n$.

$$\begin{aligned} &= \frac{m(A\Psi(W_k))}{m(W_k)} \\ &\overset{\odot}{=} |\det A| \cdot \frac{m(\Psi(W_k))}{m(W_k)} \\ &\overset{\otimes}{\to} |\det A| \cdot 1 \end{aligned}$$

($\odot$: Satz; $\otimes$: Spezialfall).
Sei nun $\Phi'(0) = A$ mit $\det A = 0$. Dann ist

$$\Phi(x) = Ax + \|x\| \cdot r(x) = Ax + f(x).$$

Es ist $\Phi(W_k) \subseteq H + f(W_k)$ mit einer Hyperebene H und $m(H) = 0$.
Für f gilt dabei:

$$f(W_k) = \left[-\sqrt{n} \cdot \ell_k \cdot \max_{x \in W_k} \|r(x)\|, \sqrt{n} \cdot \ell_k \cdot \max_{x \in W_k} \|r(x)\|\right]^n$$

mit

$$m(f(W_k)) = (2\sqrt{n} \cdot \ell_k)^n \cdot \varepsilon^n.$$

Daraus folgt dann:

$$\begin{aligned} \frac{m(f(W_k))}{m(W_k)} &\leq (2\varepsilon\sqrt{n})^n \\ \frac{m(f(W_k))}{m(W_k)} &\to 0 \text{ für } k \to \infty. \end{aligned}$$

10.6.5 Hilfssatz 2

(Satz über die Nullmengentreue)
Sei $\Phi \in C^1(U, \mathbb{R}^n)$, U offen und $N \subseteq U$ eine Nullmenge. Dann ist $\Phi(N)$ eine Nullmenge.

Beweis: Sei $U = \bigcup_{k=1}^{\infty} W_k$ mit kompakten Würfeln $W_k \subseteq U$.
Dann ist Φ auf W_k Lipschitzstetig, d. h.

$$\|\Phi(x) - \Phi(y)\| \leq L_k \cdot \|x - y\|.$$

Sei nun $N_k = N \cap W_k$. Zeige, daß $\Phi(N_k)$ eine Nullmenge ist. Dann ist auch

$$\Phi(N) = \bigcup_{k=1}^{\infty} \Phi(N_k)$$

eine Nullmenge.
Nachweis, daß $\Phi(N_k)$ eine Nullmenge ist:

Sei $\varepsilon > 0$ beliebig.
Dann existieren Würfel I_ν mit $N_k \subseteq \bigcup\limits_{\nu=1}^{\infty} I_\nu$ und $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} m(I_\nu) < \varepsilon$.
Also hat $\Phi(I_\nu)$ höchstens den L_k-fachen Durchmesser von I_ν,
d. h. es existiert ein Würfel $J_\nu \supseteq \Phi(I_\nu)$ mit höchstens L_k-facher Kantenlänge von I_ν.

$$\Rightarrow m(J_\nu) \leq (L_k)^n \cdot m(I_\nu)$$

$$\Rightarrow \Phi(N_k) \subseteq \bigcup_{\nu=1}^{\infty} \Phi(I_\nu) \subseteq \bigcup_{\nu=1}^{\infty} J_\nu$$

und damit

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} m(J_\nu) \leq (L_k)^n \cdot \sum_{\nu=1}^{\infty} m(I_\nu) \leq (L_k)^n \cdot \varepsilon$$

Also ist $\Phi(N_k)$ eine Nullmenge.

10.6.6 Hilfssatz 3

Sei $\Phi \in C^1(U, \mathbb{R}^n)$, $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und Φ injektiv. Insbesondere sei $\det(\Phi'(x)) \neq 0$ für alle $x \in U$.
Dann gilt für jeden Würfel $W \subseteq U$:

$$m(\Phi(W)) = \int\limits_W |\det \Phi'(x)|\, dx.$$

Beweis: Setze $W_0 = W$ und definiere $\alpha \in \mathbb{R}$ durch

$$m(\Phi(W)) = \alpha \cdot \int\limits_W |\det \Phi'(x)|\, dx.$$

Zu zeigen ist nun: $\alpha = 1$.
Zerlege W_0 in 2^n kompakte, gleich große Würfel I_ν mit halber Kantenlänge.
Klar ist:

$$m(W_0) = \sum_{\nu=1}^{2^n} m(I_\nu).$$

Es gilt dann:

$$m(\Phi(W_0)) = \sum_{\nu=1}^{2^n} m(\Phi(I_\nu)),$$

denn es ist

$$W_0 = \left(\bigcup_{\nu=1}^{2^n} (I_\nu)^0\right) \cup \underbrace{\left(\bigcup_{\nu=1}^{2^n} \partial I_\nu\right)}_{\text{Nullmenge}}.$$

Damit ist (weil Φ injektiv ist)

$$\Phi(W_0) = \left(\bigcup_{\nu=1}^{2^n} \Phi(I_\nu)^0\right) \cup \underbrace{\left(\Phi\left(\bigcup_{\nu=1}^{2^n} \partial I_\nu\right)\right)}_{\text{Nullmenge nach HS 2}}.$$

Daraus folgt

$$m(\Phi(W_0)) = \sum_{\nu=1}^{2^n} m(\Phi((I_\nu)^0)) + 0 = \sum_{\nu=1}^{2^n} m(\Phi(I_\nu)).$$

Andererseits gilt ebenso

$$m(\Phi(W_0)) = \alpha \int\limits_{W_0} |\det \Phi'(x)|\, dx = \sum_{\nu=1}^{2^n} \alpha \cdot \int\limits_{I_\nu} |\det \Phi'(x)|\, dx.$$

Also existiert ein ν_0 mit

$$m(\Phi(I_{\nu_0})) \geq \alpha \cdot \int\limits_{I_{\nu_0}} |\det \Phi'(x)|\, dx.$$

Setze $W_1 = I_{\nu_0}$. Genauso erhält man induktiv eine Folge von Würfeln W_k mit $W_k \subseteq W_{k-1}$, in der W_k die halbe Kantenlänge von W_{k-1} hat und für die gilt:

$$m(\Phi(W_k)) \geq \alpha \cdot \int\limits_{W_k} |\det \Phi'(x)|\, dx.$$

Daraus folgt, daß es ein $\xi \in U$ gibt mit

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} W_k = \{\xi\}.$$

Teile nun die Ungleichung durch $m(W_k)$:

$$\frac{m(\Phi(W_k))}{m(W_k)} \geq \frac{1}{m(W_k)} \cdot \alpha \int\limits_{W_k} |\det \Phi'(x)|\, dx.$$

Wende auf die linke Seite den Teil (a) und auf die rechte Seite Teil (b) vom Hilfssatz 1 an. Dann ist für $k \to \infty$:

$$|\det \Phi'(\xi)| \geq \alpha \cdot |\det \Phi'(\xi)|.$$

Also ist $\alpha \leq 1$. Zeige auf die gleiche Weise nun, daß $\alpha \geq 1$ ist. Damit ist dann die Behauptung bewiesen.

10.6.7 Hilfssatz 4

Sei $\Phi\colon U \to V$ eine Diffeomorphismus, d. h. $\Phi \in C^1(U,V)$, Φ ist bijektiv und $\Phi^{-1} \in C^1(U,V)$. Dabei seien U und V offene Mengen. Dann gilt:

$$m(V) = \int\limits_U |\det \Phi'(x)|\, dx,$$

falls eine der Seiten endlich ist.

Beweis: Seien W_k kompakte Würfel mit

$$U = \bigcup_{k=1}^{\infty} W_k.$$

Dabei sei $W_k \cap W_j$ für $k \neq j$ eine Nullmenge. Dann gilt nach dem Hilfssatz 3

$$m(\Phi(W_k)) = \int\limits_{W_k} |\det \Phi'(x)|\, dx$$

und dann

$$m(V) \overset{\text{HS2}}{=} \sum_{k=1}^{\infty} m(\Phi(W_k)) = \sum_{k=1}^{\infty} \int\limits_{W_k} |\det \Phi'(x)|\, dx \overset{\oplus}{=} \int\limits_{U} |\det \Phi'(x)|\, dx.$$

Dabei gilt $\oplus$ wegen Beppo-Levi für Reihen mit

$$f_k(x) = \begin{cases} |\det \Phi'(x)| & \text{für } x \in W_k \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

10.6.8 Beweis der Transformationsformel

Wiederholung der Transformationsformel:
Sei $U, V \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $\Phi(U, V)$ ein Diffeomorphismus. Dann gilt:

$$\int\limits_{U} f(\Phi(x)) \cdot |\det \Phi'(x)|\, dx = \int\limits_{V} f(y)\, dy,$$

falls eines der Integrale existiert.
Oder

$$\int\limits_{a}^{b} f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\, dt = \int\limits_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\, dx.$$

Beweis: Sei $f = \varphi$ eine Treppenfunktion, $\varphi\colon V \to \mathbb{R}$, etwa:

$$\varphi(x) = \begin{cases} c_j & \text{im Würfel } I_j^0 \subseteq V \text{ für } j = 1, \ldots, p \\ 0 & \text{außerhalb aller } \bar{I}_j \end{cases}.$$

Dann ist

$$\int\limits_{V} \varphi(y)\, dy = \sum_{j=1}^{p} \int\limits_{I_j} \varphi(y)\, dy = \sum_{j=1}^{p} c_j \cdot m((I_j)^0)$$

$$\overset{\text{HS4}}{=} \sum_{j=1}^{p} c_j \int\limits_{U_j} |\det \Phi'(x)|\, dx$$

mit $U_j = \Phi^{-1}((I_j)^0)$ ist hierfür

$$= \sum_{j=1}^{p} \int\limits_{U_j} \varphi(\Phi(x)) \cdot |\det \Phi'(x)|\, dx = \int\limits_{U} \varphi(\Phi(x)) \cdot |\det \Phi'(x)|\, dx,$$

d. h. die Transformationsformel gilt für alle Treppenfunktionen $\varphi\colon V \to \mathbb{R}$. Also gilt die Transformationsformel für $f \in L^+(V)$, denn $\varphi_k \nearrow f$ mit $\int \varphi_k \to \int f$:

$$\begin{aligned}\int_V f(y)\,dy &= \lim_{k\to\infty} \int_V \varphi_k(y)\,dy = \lim_{k\to\infty} \int_U \underbrace{\varphi_k(\Phi(x)) \cdot |\det \Phi'(x)|}_{\nearrow f(\Phi(x))\cdot|\det\Phi'(x)|}\,dx \\ &\overset{\text{B-L}}{=} \int_U f(\Phi(x)) \cdot |\det \Phi'(x)|\,dx.\end{aligned}$$

Also gilt die Transformationsformel auch für $f \in L(V)$. Zeige nun noch: Auch aus der Existenz von

$$\int_U f(\Phi(x)) \cdot |\det \Phi'(x)|\,dx$$

folgt die Formel.
Setze $\Psi(y) = \Phi^{-1}(y)$, Ψ Diffeomorphismus und $g(x) := f(\Phi(x)) \cdot |\det \Phi'(x)|$.
Nach Voraussetzung existiert $\int\limits_U g(x)\,dx$.

$$\begin{aligned}\int_U g(x)\,dx &= \int_V g(\Psi(y)) \cdot |\det \Phi'(y)|\,dy \\ &= \int_V f(y) \cdot \underbrace{|\det \Psi'(y)| \cdot |\det(\Phi'(\Psi(y)))|}_{=1}\,dy = \int_V f(y)\,dy.\end{aligned}$$

10.6.9 Spezielle Transformationen

(a) Polarkoordinaten im $\mathbb{R}^2$: Setze

$$\begin{aligned}x &= r\cos\theta \\ y &= r\sin\theta \\ r^2 &= x^2 + y^2 \\ \Phi(r,\theta) &= \begin{pmatrix} r\cos\theta \\ r\sin\theta \end{pmatrix}\end{aligned}$$

mit $\Phi\colon (0,\infty) \times (0, 2\pi) \to \mathbb{R}^2 \setminus \{(x,0)\colon x \geq 0\}$. Es ist

$$\det \Phi' = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r > 0.$$

Für $f \in L(\mathbb{R}^2)$ gilt dann:

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\,d(x,y) = \int_P f(r\cos\theta, r\sin\theta) \cdot r\,d(r,\theta) = \int_0^\infty \int_0^{2\pi} f(r\cos\theta, r\sin\theta) \cdot r\,d\theta\,dr.$$

(b) Kugelkoordinaten im $\mathbb{R}^3$: Setze

$$\begin{aligned}x &= r\cos\lambda \cdot \cos\beta \\ y &= r\sin\lambda \cdot \cos\beta \\ z &= r\sin\beta.\end{aligned}$$

Dabei ist λ die geographische Länge, β die Breite und $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ der quadrierte, zum Punkt (x, y, z) gehörige Radius.
Es ist $0 \le \lambda \le 2\pi$ (oder $-\pi \le \lambda \le \pi$ und $-\pi/2 \le \beta \le \pi/2$.
Herleitung: Setze $z = r \sin\beta$ mit $-\pi/2 \le \beta \le \pi/2$

$$x^2 + y^2 = r^2 - r^2 \sin^2\beta = (r\cos\beta)^2$$

Polarkoordinaten für (x, y):

$$\begin{aligned} x &= (r\cos\beta)\cos\lambda \\ y &= (r\cos\beta)\sin\lambda. \end{aligned}$$

Also:

$$\Phi(r, \lambda, \beta) = \begin{pmatrix} r\cos\lambda\cos\beta \\ r\sin\lambda\cos\beta \\ r\sin\beta \end{pmatrix}$$

mit $0 < r < \infty$, $0 < \lambda < 2\pi$ $[-\pi < \lambda < \pi]$ und $-\pi/2 < \beta < \pi/2$.

$$\Phi\colon (0, \infty) \times (0, 2\pi) \times (-\pi/2, \pi/2) \to \mathbb{R}^3 \setminus N$$

ist Diffeomorphismus mit einer Nullmenge

$$N = \{(r\cos\beta, 0, r\sin\beta)\colon r \ge 0, -\pi/2 \le \beta \le \pi/2\} = \{(x, 0, z)\colon (x, z) \in \mathbb{R}^2, x \ge 0\}$$

und

$$\det \Phi' = \begin{vmatrix} \cos\lambda\cos\beta & -r\sin\lambda\cos\beta & -r\cos\lambda\sin\beta \\ \sin\lambda\cos\beta & r\cos\lambda\cos\beta & -r\sin\lambda\sin\beta \\ \sin\beta & 0 & r\cos\beta \end{vmatrix} = r^2\cos\beta > 0.$$

Zusammen ist

$$\int\limits_{\mathbb{R}^3} f(x, y, z)\, d(x, y, z) = \int\limits_0^\infty \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} f(\Phi(r, \lambda, \beta)) \cdot r^2 \cdot \cos\beta \, d\beta \, d\lambda \, dr.$$

(c) Zylinderkoordinaten: Setze

$$\begin{aligned} x &= r\cos\theta \\ y &= r\sin\theta \\ z &= z \end{aligned}$$

mit $r^2 = x^2 + y^2$ und $0 \le \theta \le 2\pi$.

$$\Phi(r, \theta, z) = \begin{pmatrix} r\cos\theta \\ r\sin\theta \\ z \end{pmatrix}$$

$$\det \Phi' = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & r\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r.$$

(d) Kugelkoordinaten im $\mathbb{R}^n$:
Sei $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ mit $\|x\| = r$.

$$x = \Phi_n(r, \theta_0, \theta_1, \ldots, \theta_{n-2})$$

z. B.

$$\Phi_2(r, \theta_0) = r \begin{pmatrix} \cos\theta_0 \\ \sin\theta_0 \end{pmatrix}$$

$$\Phi_3(r, \theta_0, \theta_1) = r \begin{pmatrix} \cos\theta_0 \cos\theta_1 \\ \sin\theta_0 \cos\theta_1 \\ \sin\theta_1 \end{pmatrix}$$

$$\Phi_n(r, \theta_0, \ldots, \theta_{n-2}) = r \begin{pmatrix} \cos\theta_0 \cdot \cos\theta_1 \cdot \cos\theta_2 \ldots \cos\theta_{n-3} \cdot \cos\theta_{n-2} \\ \sin\theta_0 \cdot \cos\theta_1 \cdot \cos\theta_2 \ldots \cos\theta_{n-3} \cdot \cos\theta_{n-2} \\ \sin\theta_1 \cdot \cos\theta_2 \ldots \cos\theta_{n-3} \cdot \cos\theta_{n-2} \\ \ddots \qquad \vdots \\ \sin\theta_{n-3} \cdot \cos\theta_{n-2} \\ \sin\theta_{n-2} \end{pmatrix}$$

und es ist

$$\det \Phi_n' = r^{n-1}(\cos\theta_1)(\cos\theta_2)^2(\cos\theta_3)^3 \ldots (\cos\theta_{n-2})^{n-2}$$

unter den Bedingungen $0 \le r < \infty$, $0 \le \theta_0 \le 2\pi$, $-\pi/2 \le \theta_j \le \pi/2$ für $j = 1, \ldots, n-2$.
Herleitung: Setze $x_n = r \sin\theta_{n-2}$ für $-\pi/2 \le \theta_{n-2} \le \pi/2$.
$\|x\| = r$, $\bar{x} = (x_1, \ldots, x_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}$

$$\|\bar{x}\|^2_{R^{n-1}} = r^2 - r^2 \sin^2\theta_{n-2} = (r\cos\theta_{n-2})^2$$

$$x = \begin{pmatrix} \bar{x} \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Phi_{n-1}(r\cos\theta_{n-2}, \theta_0, \ldots, \theta_{n-3}) \\ r\sin\theta_{n-2} \end{pmatrix} = \Phi_n(r, \theta_0, \ldots, \theta_{n-2})$$

$$\theta_4 = \begin{pmatrix} r\cos\theta_2 \cos\theta_0 \cos\theta_1 \\ r\cos\theta_2 \sin\theta_0 \cos\theta_1 \\ r\cos\theta_2 \sin\theta_1 \\ r\sin\theta_2 \end{pmatrix}$$

Allgemein gilt für $n-1 \mapsto n$:

$$\Phi_n = \begin{pmatrix} r\cos\theta_{n-2}(\cos\theta_0 \ldots \cos\theta_{n-3}) \\ r\cos\theta_{n-2}(\sin\theta_0 \ldots \cos\theta_{n-3}) \\ \vdots \\ r\cos\theta_{n-2}(\sin\theta_{n-3}) \\ r\sin\theta_{n-2} \end{pmatrix}$$

Schreibe $\Phi_n = \Phi \circ \Psi$:

$$\Phi(\varrho, \theta_0, \ldots, \theta_{n-3}, t) = \begin{pmatrix} \Phi_{n-1}(\varrho, \theta_0, \ldots, \theta_{n-3}) \\ t \end{pmatrix}$$

$$\Psi(r, \theta_0, \ldots, \theta_{n-2}) = \begin{pmatrix} r\cos\theta_{n-2} \\ \theta_0 \\ \vdots \\ \theta_{n-3} \\ r\sin\theta_{n-2} \end{pmatrix}$$

$$\Phi \circ \Psi(r, \theta_0, \dots, \theta_{n-2}) = \begin{pmatrix} \Phi_{n-1}(r\cos\theta_{n-2}, \theta_0, \dots, \theta_{n-3}) \\ r\sin\theta_{n-2} \end{pmatrix}$$

Es ist

$$\det \Phi_n' = \det(\Phi' \circ \Psi) \cdot \Psi'$$

mit

$$\det \Phi' \circ \Psi = \begin{vmatrix} \Phi_{n-1}' \circ \Psi & 0 \\ 0 \dots 0 & 1 \end{vmatrix} = \det \Phi_{n-1}'(r\cos\theta_{n-2}, \theta_0, \dots, \theta_{n-3}$$

$$\det \Psi' = \begin{vmatrix} \cos\theta_{n-2} & 0 & 0 & \dots & 0 & -r\sin\theta_{n-2} \\ 0 & 1 & 0 & & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & & 1 & 0 \\ \sin\theta_{n-2} & 0 & 0 & \dots & 0 & r\cos\theta_{n-2} \end{vmatrix} = r \text{ (als Aufgabe)}$$

Rekursionsformel für die Determinante:

$$\underbrace{\det \Phi_n'}_{\triangle_n}(r, \theta_0, \dots, \theta_{n-2}) = r \cdot \underbrace{\det \Phi_{n-1}'}_{\triangle_{n-1}}(r\cos\theta_{n-2}, \theta_0, \dots, \theta_{n-3})$$

$\triangle_2 = r,\ \triangle_3 = r\cos\theta_1$
$\triangle_{n-1} = r^{n-2}\cos\theta_1(\cos\theta_2)^2 \dots (\cos\theta_{n-3})^{n-3}$
$\triangle_n = r \cdot (r\cos\theta_{n-2})^{n-2}\cos\theta_1(\cos\theta_2)^2 \dots (\cos\theta_{n-3})^{n-3}.$

10.6.10 Beispiele

(a) Polarkoordinaten im $\mathbb{R}^2$: Berechnung von

$$I = \int_0^\infty e^{-t^2}\, dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

Beweis: Sei $Q = \{(x,y) \colon x, y > 0\}$. Dann ist

$$\int_Q e^{-(x^2+y^2)}\, d(x,y) = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(x^2+y^2)}\, dy\, dx = \int_0^\infty e^{-x^2}\, dx \cdot \int_0^\infty e^{-y^2}\, dy = I^2.$$

Mit Polarkoordinaten ist

$$\begin{aligned} \int_Q e^{-(x^2+y^2)}\, d(x,y) &= \int_0^\infty \int_0^{\pi/2} e^{-r^2} \cdot r\, d\theta\, dr \\ &= \frac{\pi}{2} \int_0^\infty \left(-\frac{1}{2}\right) e^{-r^2} \cdot (-2r)\, dr = -\frac{\pi}{4} e^{-r^2}\Big|_0^\infty = \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

(b) Kugelkoordinaten im $\mathbb{R}^3$: Aufgabe: Berechne $m(K(0,r)) =?$

(c) Zylinderkoordinaten:
Berechne den Inhalt von

$$E = \left\{ (x,y,z) \colon x^2 + y^2 \le \frac{1}{1+z^2} \right\}.$$

Es ist $z \in \mathbb{R}$ und $0 \le r \le \frac{1}{\sqrt{1+z^2}}$.

$$m(E) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{0}^{(1+z^2)^{-1/2}} \int\limits_{0}^{2\pi} r\, d\theta\, dr\, dz = 2\pi \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{r^2}{2}\Big|_0^{(1+z^2)^{-1/2}} dz$$

$$= \pi \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dz}{1+z^2} = \pi \arctan z \Big|_{-\infty}^{\infty} = \pi^2.$$

(d) Allgemeine Kugelkoordinaten: Aufgabe: Berechne $m(K(0,r)) =?$

10.7 Parameterintegrale

10.7.1 Feste Bezeichnungen

$E \subseteq \mathbb{R}^n$ ist meßbar und $\neq \emptyset$.
$\emptyset \neq D \subseteq \mathbb{R}^n$.
$f\colon D \times E \to \mathbb{R}$. Für $f(x,y)$ ist $x \in D$ und $y \in E$.
f ist bezüglich y integrierbar über E.
$g\colon E \to [0,\infty)$ ist integrierbar.

$$F(x) := \int\limits_E f(x,y)\, dy$$

$F\colon D \to \mathbb{R}$ heißt Parameterintegral mit dem Parameter x.
Beispiel: Die Gamma-Funktion

$$\Gamma(x) = \int\limits_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1}\, dt$$

10.7.2 Satz über die Stetigkeit

Sei $|f(x,y)| \le g(y)$ für alle $(x,y) \in D \times E$, und sei $x \mapsto f(x,y)$ stetig in $x = a \in D$ für fast alle $y \in E$.
Dann ist F stetig in $x = a$:

$$\lim_{x\to a} \int\limits_E f(x,y)\, dy = \int\limits_E \underbrace{(\lim_{x\to a} f(x,y))}_{=:f(a,y)}\, dy$$

Beweis: $(x^{(k)})$ sei Folge in D mit $x^{(k)} \to a$.

$$f_k(y) := |f(x^{(k)},y) - f(a,y)| \to 0 \text{ für } k \to \infty \text{ fast überall in } E$$

$0 \le f_k(y) \le 2g(y)$.
Mit dem Satz von Lebesgue gilt:

$$\int\limits_E f_k(y)\, dy \to 0 \text{ für } k \to \infty.$$

$$|F(x^{(k)}) - F(a)| = \left| \int\limits_E f(x^{(k)}, y) - f(a,y)\, dy \right|$$
$$\leq \int\limits_E |f(x^{(k)}, y) - f(a,y)|\, dy \to 0 \text{ für } k \to \infty.$$

10.7.3 Differenzierbarkeit von Parameterintegralen

Sei $f\colon D \times E \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}^n$, $E \subseteq \mathbb{R}^m$ und

$$F(x) = \int\limits_E f(x,y)\, dy.$$

Ist $D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $x \mapsto f(x,y)$ diffbar in $x = a$ für fast alle y und gilt

$$|f(x,y) - f(a,y)| \leq \|x-a\| g(y) \text{ (mit } g \in L),$$

so ist F differenzierbar in $x = a$ und es gilt

$$\frac{\partial F}{\partial x_\nu}(a) = \int\limits_E \frac{\partial f}{\partial x_\nu}(a,y)\, dy.$$

Beweis:

$$\frac{\partial f}{\partial x_\nu}(a,y) = \lim_{t\to 0} \frac{f(a+te^\nu, y) - f(a,y)}{t}$$

(ex. nach Vor. für fast alle y)

$$= \lim_{k\to\infty} \underbrace{\frac{f(a+\frac{1}{k}e^\nu, y) - f(a,y)}{\frac{1}{k}}}_{\text{meßbar bzgl. } y} = \text{meßbar}$$

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x_\nu}(a,y) \right| \leq g(y) \text{ für } \nu = 1, \ldots, n$$

also integrierbar.
Seo $h \in \mathbb{R}^n$, $\|h\| < \delta$, δ so, daß $\{x\colon \|x-a\| < \delta\} \subseteq D$:

$$\frac{1}{\|h\|} \left| F(a+h) - F(a) - \sum_{\nu=1}^n h_\nu \cdot \int\limits_E \frac{\partial F}{\partial x_\nu}(a,y)\, dy \right|$$
$$\leq \frac{1}{\|h\|} \int\limits_E \left| f(a+h,y) - f(a,y) - \sum_{\nu=1}^n h_\nu \frac{\partial f}{\partial x_\nu}(a,y) \right| dy$$
$$\overset{?}{\to} 0 \text{ für } h \to 0$$

Setze

$$\Phi(h,y) := \frac{1}{\|h\|} \left| \underbrace{f(a+h,y) - f(a,y)}_{\leq g(y)\cdot\|h\|} - \underbrace{\sum_{\nu=1}^n h_\nu \frac{\partial f}{\partial x_\nu}(a,y)}_{\leq \|h\|\cdot n\cdot g(y)} \right|$$

ist stetig für $0 < \|h\| < \delta$ für fast alle y.
Es ist $\Phi(0, y) := 0$.
Wenn $h \mapsto \Phi(h, y)$ stetig ist in $K(0, \delta)$ für fast alle y, dann gilt nach dem Stetigkeitssatz mit $|\Phi(h, y)| \leq g(y) + n \cdot g(y) = (n+1)g(y)$ das obige $\stackrel{?}{\to}$.
Weise nun die Stetigkeit im Punkt $h = 0$ (für fast alle y) nach:
Für welche y gilt $\Phi(h, y) \to 0$, wenn $h \to 0$ ist?
Genau für alle y, in denen $f(x, y)$ bzgl. x differenzierbar ist im Punkt $x = a$.

10.7.4 Beispiel

Die Gamma-Funktion ist für $x > 0$ definiert durch

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1}\, dt.$$

Die Beta-Funktion ist für $x > 0$ und $y > 0$ definiert durch

$$B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1}\, dt.$$

(a) Γ ist stetig.

(b) Γ ist stetig differenzierbar ($\Gamma \in C^\infty(0, \infty)$).

(c) Es ist

$$\Gamma^{(k)} = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} (\log t)^k\, dt.$$

Beweis:

zu (a): $x \mapsto e^{-t} t^{x-1}$ ist stetig für alle $t > 0$.
Sei $a \in D = [\alpha, \beta] \subseteq (0, \infty) = E$. Dann ist

$$e^{-t} t^{x-1} \leq \left\{ \begin{array}{rl} t^{\alpha-1} & \text{für } 0 < t \leq 1 \\ e^{-t} t^{\beta-1} & \text{für } t > 1 \end{array} \right\} =: g(t)$$

g ist Majorante. $\Rightarrow$ Stetigkeitssatz anwenden.

zu (b): Es ist

$$\frac{\partial}{\partial x} e^{-t} t^{x-1} = e^{-t} t^{x-1} \log t.$$

Sei $a > 0$, $0 < \alpha < a < \beta < \infty$ und $D = (\alpha, \beta)$. Dann ist

$$\left| \frac{\partial}{\partial x} e^{-t} t^{x-1} \right| \leq |\log t| \cdot g(t)$$

integrierbar (Aufgabe).
Satz über die Differenzierbarkeit anwendwar, da

$$|e^{-t} t^{x-1} - e^{-t} t^{a-1}| \stackrel{\text{MWS}}{=} |x - a| \cdot |e^{-t} t^{\xi-1} \log t|$$

(wobei ξ zwischen a und x ist)

$$\leq |x - a| \cdot \underbrace{|\log t| \cdot g(t)}_{\text{Majorante}}.$$

zu (c): Ohne Beweis.

10.7.5 Beispiel: Das Newton-Potential

Für dieses Beispiel ist $n \geq 3$.
Sei $K \subseteq \mathbb{R}^n$ kompakt, $\varrho\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ meßbare, beschränkte Massendichte und

$$u(x) = \int\limits_K \frac{\varrho(\xi)}{\|x-\xi\|^{n-2}}\, d\xi$$

.

Behauptung:

- $u \in C^1(\mathbb{R}^n)$
- $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n \setminus K)$

Zeige:

(a) $u \in C^2(D)$, $D \subseteq \mathbb{R}^n$ Gebiet mit $\bar{D} \cap K = \emptyset$

(b) u ist stetig in $a \in K$

(c) Das Newton-Potential ist harmonisch in $\mathbb{R}^n \setminus K$, d. h.

$$\sum_{\nu=1}^{n} u_{x_\nu x_\nu} = 0,$$

kurz:

$$\triangle u = 0$$

mit dem *Laplace-Operator*

$$\triangle = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_\nu^2}.$$

Beweis:

zu (a): Sei $a \in \mathbb{R}^n \setminus K$, D eine Umgebung um a mit $\bar{D} \cap K = \emptyset$.
Für $x \in D$ gilt:

$$\|x-\xi\| \geq d > 0 \text{ für alle } \xi \in K,\ x \in D.$$

Außerdem ist

$$|\varrho(\xi) \leq M.$$

$\mathbf{C^0}$**:**

$$x \longmapsto \frac{\varrho(\xi)}{\|x-\xi\|^{n-2}}$$

ist stetig in D für alle $\xi \in K$. Eine Majorante in K ist

$$g(\xi) = \frac{M}{d^{n-2}}.$$

Also ist $u \in C^0(\mathbb{R}^n)$.
$\mathbf{C^1}$**:**

$$\left|\frac{\partial}{\partial x_\nu} \frac{\varrho(\xi)}{\|x-\xi\|^{n-2}}\right| = \left|\varrho(\xi)(-n+2)\|x-\xi\|^{-n+1} \frac{\partial}{\partial x_\nu}\|x-\xi\|\right|$$

mit $\frac{\partial}{\partial x_\nu}\|x\| = \frac{x_\nu}{\|x\|}$

$$\begin{aligned} &= \left|(-n+2)\cdot \varrho(\xi)\cdot \|x-\xi\|^{-n+1}\cdot \frac{x_\nu-\xi_\nu}{\|x-\xi\|}\right| \\ &\le (n-2)M\cdot \|x-\xi\|^{-n+1} \\ &\le (n-2)Md^{-n+1} \end{aligned}$$

mit $\xi \in K, x \in D$.
$\mathbf{C}^2$:
Es ist

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu}\frac{\partial}{\partial x_\nu}\left(\frac{1}{\|x-\xi\|^{n-2}}\right) = -(+n-2)\frac{\partial}{\partial x_\mu}\frac{x_\nu-\xi_\nu}{\|x-\xi\|^n}$$

Mit

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu}\left(\frac{x_\nu-\xi_\nu}{\|x-\xi\|^n}\right) = \begin{cases} (x_\nu-\xi_\nu)\cdot(-n)\|x-\xi\|^{-n-1}\cdot\frac{x_\mu-\xi_\mu}{\|x-\xi\|} & \mu\neq\nu \\ (x_\nu-\xi_\nu)^2\cdot(-n)\|x-\xi\|^{-n-2}+\frac{1}{\|x-\xi\|^n} & \mu=\nu \end{cases}$$

ist dann

$$\frac{\partial^2}{\partial x_\mu x_\nu}\frac{1}{\|x-\xi\|^{n-2}} = \frac{-n(x_\nu-\xi_\nu)(x_\mu-\xi_\mu)}{\|x-\xi\|^{n+2}}$$

und

$$\frac{\partial^2}{\partial x_\nu^2}\frac{1}{\|x-\xi\|^{n-2}} = \frac{-n(x_\nu-\xi_\nu)^2}{\|x-\xi\|^{n+2}}+\frac{1}{\|x+\xi\|^n}$$

$\Rightarrow$ Majoranten klar: immer von der Form $\frac{\text{const}}{d^n}$ für C^n.

zu (b): Stetigkeit in $x = a \in K$: Sei $a \in K$, $U = K(a,\delta)$, δ fest: Es ist

$$u(x) = \underbrace{\int\limits_{K\setminus U}\frac{\varrho(\xi)}{\|x-\xi\|^{n-2}}\,d\xi}_{w(x)} + \underbrace{\int\limits_{K\cap U}\frac{\varrho(\xi)}{\|x-\xi\|^{n-2}}\,d\xi}_{v(x)}.$$

$w(x)$ ist stetig in U, wie schon gezeigt.
Sei $\varepsilon > 0$, $\sigma > 0$, $sigma < \delta/2$, so daß $K(a,\sigma) \subseteq K$ ist.
Sei $\|x-a\| < \sigma$:

$$\begin{aligned} |v(x)-v(a)| &= \left|\int\limits_{K\cap U}\frac{\varrho(x)}{\|x-\xi\|^{n-2}}-\frac{\varrho(\xi)}{\|a-\xi\|^{n-2}}\,d\xi\right| \\ &\le \int\limits_{K\cap U}\left|\frac{\varrho(x)}{\|x-\xi\|^{n-2}}-\frac{\varrho(\xi)}{\|a-\xi\|^{n-2}}\right|d\xi \\ &\le M\left(\int\limits_{K\cap U}\frac{d\xi}{\|x-\xi\|^{n-2}}+\int\limits_{K\cap U}\frac{d\xi}{\|a-\xi\|^{n-2}}\right) \\ &\le M\left(\int\limits_{U}\frac{d\xi}{\|x-\xi\|^{n-2}}+\int\limits_{U}\frac{d\xi}{\|a-\xi\|^{n-2}}\right) \end{aligned}$$

Berechne das 2. Integral:

$$\begin{aligned}\int\limits_U \frac{d\xi}{\|a-\xi\|^{n-2}} &= \left|\begin{matrix}\text{Subst.:}\\ \xi = a+\delta\cdot y\\ d\xi = \delta^n \cdot dy\end{matrix}\right| \\ &= \delta^n \int\limits_{K(0,1)} \frac{dy}{\delta^{n-2}\|y\|^{n-2}} \\ &= \delta^2 \int\limits_{K(0,1)} \frac{dy}{\|y\|^{n-2}}\end{aligned}$$

Berechne nun das 1. Integral mit Substitution $\xi = x + \delta \cdot y$:

$$\delta^2 \int\limits_{K(0,3/2)} \frac{dy}{\|y\|^{n-2}} = \text{const} \cdot \delta^2$$

Sei nun $\varepsilon > 0$ und $\delta > 0$ so, daß $\text{const} \cdot \delta^2 < \varepsilon/2$ ist:

$$\begin{aligned} u(x) - u(a) &= v(x) - v(a) + w(x) - w(a) \\ |v(x) - v(a)| &< \varepsilon/2 \text{ für } \|x-a\| < \delta/2 \\ |w(x) - w(a)| &< \varepsilon/2 \text{ für } \|x-a\| < \sigma < \delta/2 \\ &\Rightarrow |u(x)-u(a)| < \varepsilon \text{ für } \|x-a\| < \delta. \end{aligned}$$

zu (c):

$$\triangle u = \int\limits_E \varrho(\xi) \underbrace{\left(\triangle \frac{1}{\|x-\xi\|^{n-2}}\right)}_{=0 \text{ für alle } \xi} d\xi = 0,$$

denn es ist

$$\triangle \frac{1}{\|x-\xi\|^{n-2}} = \frac{n}{\|x-\xi\|^n} - \frac{n}{\|x-\xi\|^{n-2}} \sum_{\nu=1}^n (x_\nu - \xi_\nu)^2 = 0.$$

10.8 Das eindimensionale Lebesgue-Integral

In diesem Abschnitt ist immer $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ und

$$\int\limits_{[a,b]} f(x)\,dx =: \int\limits_a^b f(x)\,dx.$$

Zur Wiederholung: Wenn $f' \in R([a,b])$ ist, dann gilt

$$\int\limits_a^b f'(x)\,dx = f(b) - f(a).$$

10.8.1 Satz

Ist f monoton wachsend (fallend), so ist f fast überall differenzierbar und für das Lebesgueintegral gilt:

$$\int\limits_a^b f'(x)\,dx \leq f(b) - f(a)$$

(beziehungsweise $\geq$).

Beweis: Später in 10.8.3.

10.8.2 Hilfssatz (Sunrise-Lemma)

(nach Riesz) Sei $g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und

$$E = \{x \in (a,b)\colon \text{ es ex. } \xi > x \text{ mit } g(\xi) > g(x)\}.$$

Behauptung: E ist offen, also $E = \bigcup_k (a_k, b_k)$ oder $= \emptyset$ und $g(a_k) = g(b_k)$, außer, wenn $a_k = a$ ist. Dort gilt nur: $g(a_k) \le g(b_k)$.

Beweis: Sei $x \in E$ und dazu $\xi > x$ mit $g(\xi) > g(x)$. Es existiert ein $\delta > 0$ mit: Ist $|x' - x| < \delta$, so gilt: $x' < \xi$ und $g(x') < g(\xi)$ (wegen der Stetigkeit).
Also ist $(x-\delta, x+\delta) \cap (a,b) \subseteq E$, E ist offen. Damit ist $E = \bigcup_k (a_k, b_k)$.
Zeige noch, daß $g(a_k) = g(b_k)$ ist:

1. Sei $a_k > 0$. Dann ist $g(a_k) \ge g(b_k)$, sonst wäre nämlich $a_k \in E$ (sonst: $g(a_k) < g(b_k)$ für $a_k < b_k \Rightarrow a_k \in E$).

2. Sei $x \in (a_k, b_k)$ und x' definiert durch:

   $$g(x') = \max\{g(t)\colon x \le t \le b_k\}.$$

   Wen $x' < b_k$ ist, existiert ein $\xi > b_k$ mit $g(\xi) > g(x')$, weil $x' \in E$ und $g(x')$ maximal ist. Damit wäre dann $g(\xi) > g(x') \ge g(b_k)$ und damit $b_k \in E$. Widerspruch! Also ist $g(x) \le g(x') = g(b_k)$. Für $x \to a_k$ gilt dann:

   $$g(a_k) \le g(b_k).$$

Zusammen ist also $g(a_k) = g(b_k)$.

10.8.3 Beweis zu 10.8.1

Sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ monoton wachsend.

Behauptung 1: f ist fast überall in $[a,b]$ differenzierbar.

Beweis: Sei $x \in (a,b)$. Setze

$$\Lambda_r = \overline{\lim_{h \to 0+}} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$
$$\lambda_r = \underline{\lim_{h \to 0+}} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Dies ist die **r**echtsseitige obere, bzw. untere Ableitung.
Definiere analog (mit $h \to 0-$) die **l**inksseitige obere/untere Ableitung Λ_ℓ und λ_ℓ. $f'(x)$ existiert nun genau dann, wenn $\lambda_\ell = \Lambda_\ell = \lambda_r = \Lambda_r < \infty$ ist.
Da f monoton wachsend ist, sind $\lambda_\ell, \ldots, \Lambda_r \ge 0$. Zeige noch in 3 Schritten:

1.) $\Lambda_r < +\infty$ fast überall.

2.) $\Lambda_r < \lambda_\ell$ fast überall.

3.) $\Lambda_\ell \le \lambda_r$ fast überall.

Zusammen folgt dann:

$$\Lambda_\ell \le \lambda_r \le \Lambda_r \le \lambda_\ell \le \lambda_l < \infty \text{ fast überall,}$$

d. h. f ist fast überall differenzierbar.

1.) Es ist

$$E_\infty = \{x \in (a,b) \colon \Lambda_r = +\infty\} \subseteq \{x \in (a,b) \colon \Lambda_r > n\} = E_n$$

für alle $n \in \mathbb{N}$.
Sei $x \in E_n$. Dann existiert ein $\xi = x + h > x$ mit

$$\frac{f(\xi) - f(x)}{\xi - x} > n,$$

d. h.

$$\underbrace{f(\xi) - n \cdot \xi}_{=:g(\xi)} > \underbrace{f(x) - n \cdot x}_{=:g(x)}.$$

Mit dem Sunrise-Lemma folgt damit: $E_n \bigcup(a_k, b_k)$ mit $g(a_k) \le g(b_k)$. Daraus folgt:

$$f(a_k) - f(b_k) \le n(a_k - b_k)$$
$$(b_k - a_k) \le \frac{1}{n}(f(b_k) - f(a_k)).$$

Summiere auf:

$$\begin{aligned}\sum_k (b_k - a_k) &\le \frac{1}{n} \sum_k f(b_k) - f(a_k) \\ &\le \frac{1}{n}(f(b) - f(a)) \\ &< \varepsilon \text{ für } n \ge n_0.\end{aligned}$$

Damit ist $m(E_\infty) \le m(E_n) < \varepsilon$ für $n \ge n_0$, also ist $m(E_\infty) = 0$ und damit $\Lambda_r < +\infty$ fast überall.

2.) Setze

$$E_{c,d} = \{x \in (a,b) \colon \Lambda_r > d > c > \lambda_\ell\}$$

und

$$E = \{x \in (a,b) \colon \Lambda_r > \lambda_\ell\} = \bigcup_{0 \le c < d \text{ rational}} E_{c,d}.$$

E ist eine abzählbare Vereinigung.
Zeige: $m(E_{c,d}) = 0$, also $m(E) = 0$.
Sei $x \in E_{c,d}$: Es existiert ein $\xi < x$ mit

$$\frac{f(\xi) - f(x)}{\xi - x} < c.$$

Setze $g(x) = f(x) - c \cdot x$. Dann gilt:

$$g(\xi) < g(x)$$

und mit dem Hilfssatz (Sunrise-Lemma) folgt dann:
$E_{c,d} \subseteq \bigcup_k (a_k, b_k)$ mit $g(b_k) = g(a_k)$ oder

$$c(b_k - a_k) = f(b_k) - f(a_k).$$

Sei nun $x \in (a_k, b_k)$, $x \in E_{c,d}$:
Es existiert $\xi > x$, $\xi \in (a,b)$ mit: $g(x) := f(x) - dx$: $g(\xi) > g(x)$.
Hilfssatz, angewandt auf $[a_k, b_k]$:
$\Rightarrow E_{c,d} \cap (a_k, b_k) \subseteq \bigcup\limits_{\ell}(a_{k_\ell}, b_{k_\ell})$ mit $g(a_{k_\ell}) = g(b_{k_\ell})$,
d. h. $d(b_{k_\ell} - a_{k_\ell}) = f(b_{k_\ell}) - f(a_{k_\ell})$. Setze

$$\Sigma_1 = \bigcup_k \bigcup_\ell (a_{k_\ell}, b_{k_\ell}).$$

Es ist

$$\begin{aligned} m(\Sigma_1) &= \sum_k \sum_\ell (b_{k_\ell} - a_{k_\ell}) = \frac{1}{d} \sum_k \underbrace{\left(\sum_\ell f(b_{k_\ell}) - f(a_{k_\ell}) \right)}_{\leq f(b_k) - f(a_k) = c(b_k - a_k)} \\ &= \underbrace{\frac{c}{d}}_{=q<1} \sum_k (b_k - a_k) = q \cdot m(\Sigma_1') \end{aligned}$$

mit $\Sigma_1' = \bigcup\limits_k (a_k, b_k)$.
Zusammen: (1) $E_{c,d} \subseteq \Sigma_1'$ und $E \subseteq \Sigma_1$,

$$m(\Sigma_1) \leq q \cdot m(\sigma_1').$$

Wiederhole (1), angewandt auf die Teilintervalle von Σ_1.
Erhalte Σ_2, Σ_2' mit $E_{c,d} \subseteq \Sigma_2$,

$$\begin{gathered} m(\Sigma_2) \leq q \cdot m(\Sigma_2') \\ \Sigma_2' \subseteq \Sigma_1 \end{gathered}$$

und damit

$$m(\Sigma_2) \leq q^2 \cdot m(\Sigma_1').$$

Allgemein erhält man mit Induktion Σ_n, Σ_n' mit

$$\begin{gathered} m(\Sigma_n) \leq q \cdot m(\Sigma_n') \\ \Sigma_n' \subseteq \Sigma_{n-1} \\ E_{c,d} \subseteq \Sigma_n. \end{gathered}$$

Also gilt für jedes n

$$\begin{aligned} m(E_{c,d}) \leq m(\Sigma_n) &\leq q^n \cdot m(\Sigma_1') \\ &\leq q^n \cdot (b-a) < \varepsilon \text{ für } n \geq n_0. \end{aligned}$$

Damit ist $m(E_{c,d}) = 0$, also auch $m(E) = 0$ und $\Lambda_r \leq \lambda_\ell$ fast überall.

3.) analog zu 2.)

Behauptung 2: Ist $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig, wachsend, so gilt für das L-Integral

$$\int_a^b f'(x)\,dx \leq f(b) - f(a).$$

Beweis: Setze

$$f_k(x) = \frac{f(x+\frac{1}{k}) - f(x)}{\frac{1}{k}}.$$

f_k ist meßbar.
Es ist fast überall

$$\lim_{k\to\infty} f_k(x) = f'(x).$$

Also ist f' meßbar (Setze $f' = 0$, wo die Ableitung nicht existiert).
Dann ist

$$\begin{aligned}
0 \le \int_a^b f_k(x)\,dx &= k\left[\int_a^b f\left(x+\frac{1}{k}\right)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx\right] \\
&= k\left[\int_{a+1/k}^{b+1/k} f(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx\right] \\
&= -\frac{\int_a^{a+1/k} f(x)\,dx}{\frac{1}{k}} + \frac{\int_b^{b+1/k} f(x)\,dx}{\frac{1}{k}} \\
&\overset{\odot}{\to} -f(a) + f(b).
\end{aligned}$$

Dabei ist $\odot$ eine frühere Aufgabe.
Es gilt also

$$\int_a^b f_k(x)\,dx \to f(b) - f(a).$$

Mit dem Lemma von Fatou gilt dann: $f' \in L$ und

$$\int_a^b f'(x)\,dx \le \lim_{k\to\infty} \int_a^b f_k(x)\,dx = f(b) - f(a).$$

10.8.4 Beispiel

(Aufgabenblatt) Zu jeder Nullmenge $N \subseteq (a,b)$
gibt es eine stetige und wachsende Funktion $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ mit

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \to +\infty$$

für $x \in N$.

Konstruktion: Es gibt Intervalle I_k mit

$$\sum_k m(I_k) \le 1, \qquad N \subseteq \bigcup_{k=n}^{\infty} I_k \text{ für alle } n$$

$$f(x) := \sum_{k=1}^{\infty} m(I_k \cap [a,x])$$

hat alle Eigenschaften.

10.8.5 Beispiel einer stetigen, streng wachsenden Funktion mit Ableitung 0

Gesucht ist eine Funktion $f\colon [0,1] \to [0,1]$ mit $f'(x) = 0$ fast überall, f ist stetig, $f(0) = 0$ und $f(1) = 1$.
Konstruiere eine Folge (f_n) mit $f_n\colon [0,1] \to [0,1]$. Dabei soll f_n auf jedem Teilintervall $I_k^n = [k \cdot 2^{-n}, (k+1) \cdot 2^{-n}]$ linear sein. Für $n = 0$ wird $f_0(x) = x$ gesetzt. Konstruiere nun f_n. Es ist

$$I_k^n = I_{2k}^{n+1} \cup I_{2k+1}^{n+1}.$$

Setze in $k \cdot 2^{-n}$ und $(k+1) \cdot 2^{-n}$, den Endpunkten von I_k^n

$$f_{n+1} = f_n.$$

Im Mittelpunkt $(2k+1) \cdot 2^{-n-1}$ (dies ist der rechte Mittelpunkt voon I_{2k}^{n+1}, bzw. der linke Endpunkt von I_{2k+1}^{n+1}) ist

$$f_{n+1}((2k+1) \cdot 2^{-n-1}) = \frac{1}{3} f_n(k \cdot 2^{-n}) + \frac{2}{3} f_n((k+1) \cdot 2^{-n}).$$

Zwischen diesen Punkten wird f_{n+1} linear definiert.
Alle f_n sind stetig und streng wachsend.

(a) $f(x) := \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ existiert punktweise und ist schwach wachsend.
Da $f_n(x) \leq f_{n+1}(x) \leq 1$ ist, existiert $f(x)$.
Da f_n monoton ist, ist auch f monoton, aber nicht unbedingt streng monoton.

(b) f ist streng monoton wachsend: Sei $0 \leq x < y \leq 1$. Wähle k und n so, daß

$$\begin{aligned} x &< k \cdot 2^{-n} \\ y &> (k+1) \cdot 2^{-n}. \end{aligned}$$

Dann ist

$$f(x) \leq f(k \cdot 2^{-n}) = f_n k \cdot 2^{-n} < f_n((k+1)2^{-1}) = f((k+1)2^{-n}) \leq f(y).$$

(c) Sei $I_{k_n}^n = [\alpha_n, \beta_n]$ geschachtelt, d. h. $I_{k_n}^n \supseteq I_{k_{n+1}}^{n+1}$. Dann ist

$$\begin{aligned} 0 &\leq f(\beta_{n+1}) - f(\alpha_{n+1}) && (10.4)\\ &= \begin{cases} \frac{1}{3} f(\alpha_n) + \frac{2}{3} f(\beta_n) - f(\alpha_n) & \text{im linken Intervall} \\ f(\beta_n) - \frac{1}{3} f(\alpha_n) - \frac{2}{3} f(\beta_n) & \text{im rechten Intervall} \end{cases} && (10.5)\\ &= \begin{cases} \frac{2}{3}(f(\beta_n) - f(\alpha_n)) & \text{im linken Intervall} \\ \frac{1}{3}(f(\beta_n) - f(\alpha_n)) & \text{im rechten Intervall} \end{cases} && (10.6)\\ &\leq \frac{2}{3}(f(\beta_n) - f(\alpha_n)). && (10.7) \end{aligned}$$

(d) Stetigkeit in $x \in [0,1]$: Sei $x \in (\alpha_n, \beta_n] \cup [\beta_n, \gamma_n)$ mit $\alpha_n = k_n \cdot 2^{-n}$, $\beta_n = (k_n+1) \cdot 2^{-n}$ und $\gamma_n = (k_n+2) \cdot 2^{-n}$.
Sei $\varepsilon > 0$: Wähle n so, daß

$$2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n < \varepsilon.$$

Setze $I = (\alpha_n, \beta_n)$. Sei nun $y \in I$:

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &\leq f(\gamma_n) - f(\alpha_n) \\ &= f(\gamma_n) - f(\beta_n) + f(\beta_n) - f(\alpha_n) \\ &\leq 2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n \cdot (f(1) - f(0)) < \varepsilon. \end{aligned}$$

(e) Nach dem Satz existiert f' fast überall. Zeige nun: $f'(x) = 0$ dort, wo f' existiert.

$$\begin{aligned}\frac{f(\beta_{n+1}) - f(\alpha_{n+1})}{\beta_{n+1} - \alpha_{n+1}} &= \frac{f(\beta_n) - f(\alpha_n)}{\beta_n - \alpha_n} \cdot \left(2 \cdot \left(\frac{1}{2} \pm \frac{1}{6}\right)\right) \\ &= \frac{f(\beta_n) - f(\alpha_n)}{\beta_n - \alpha_n} \cdot \left(1 \pm \frac{1}{3}\right).\end{aligned}$$

Wenn $f'(x)$ existiert mit $x \in [\alpha_n, \beta_n]$, dann ist

$$f'(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{f(\beta_n) - f(\alpha_n)}{\beta_n - \alpha_n} \overset{\text{Ind.}}{=} \lim_{n\to\infty} \prod_{k=0}^{n-1} \left(1 + \frac{1}{3}\varepsilon_k\right)$$

mit $\varepsilon_k = 1$ oder $\varepsilon_k = -1$. Setze

$$p_n = \prod_{k=0}^{n-1} \left(1 + \frac{1}{3}\varepsilon_k\right) \text{ und } p = \lim_{n\to\infty} p_n.$$

p existiert genau dann, wenn $p = 0$ ist. Annahme $p > 0$:
Dann ist $(1 + \frac{1}{3}\varepsilon_n) = \frac{p_{n+1}}{p_n} \to \frac{p}{p} = 1$ für $n \to \infty$.
Damit ist $\varepsilon_n \to 0$ für $n \to \infty$. WIDERSPRUCH! Also ist $f'(x) = 0$ fast überall.

10.8.6 Satz

Seien $f_k \colon [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig, monoton wachsend und

$$f(x) := \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)$$

sei konvergent in $[a, b]$.
Dann ist f stetig, wachsend und es ist fast überall

$$f'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k'(x).$$

Beweis: Sei OBdA $f_n(a) = 0$ (sonst betrachte $\sum\limits_{k=0}^{\infty} (f_k(x) - f_k(a))$. Setze

$$s_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f_k(x)$$

$$r_n(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(x).$$

f ist monoton wachsend (klar).
$0 \le r_n(x) \le r_n(b) \to 0$ für $n \to \infty$.
Also liegt gleichmäßige Konvergenz vor und damit ist f stetig.
Sei

$$E = \{x \colon f'(x) \text{ oder eine Ableitung } f_k'(x) \text{ existiert nicht}.$$

E ist Nullmenge. Sei $x \in [a, b] \setminus E$. Dann konvergiert die Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} f_k'(x),$$

da $s_n'(x) \leq s_{n+1}'(x) \overset{\otimes}{\leq} f'(x)$ ist.
Dabei gilt $\otimes$, da $f = s_n + r_n$ und damit $f' = s_n' + \underbrace{r_n'}_{\geq 0} \geq s_n'$ ist.

Wähle n_k so, daß

$$\sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{(f(b) - s_{n_k}(b))}_{r_{n_k}(b)}$$

konvergiert. Dann konvergiert die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} (f(x) - s_{n_k}(x))$$

gleichmäßig, da

$$0 \leq \underbrace{f(x) - s_{n_k}(x)}_{=r_{n_k}(x)} \leq r_{n_k}(x).$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} (f'(x) - s_{n_k}'(x))$$

konvergiert wie $\sum s_k'(x)$.
Also ist $s_{n_k}'(x) \to f'(x)$ für $k \to \infty$ und damit $x_n'(x) \to f'(x)$, da $((s_n'(x)) \uparrow)$.

10.8.7 Definition: absolute Stetigkeit

Eine Funktion $F\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ heißt absolut stetig, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gilt mit:
Sind $(a_k, b_k) \subseteq [a,b]$ für $k = 1, \ldots, n$ paarweise disjunkt mit

$$\sum_{k=1}^{n} (b_k - a_k) < \delta,$$

dann gilt

$$\sum_{k=1}^{n} |F(b_k) - F(a_k)| < \varepsilon.$$

10.8.8 Beispiele und Bemerkungen

(a) Absolut stetige Funktionen sind stetig.

(b) Funktionen der Form

$$F(x) = \int_a^x f(t)\, dt$$

mit $f \in L([a,b])$ sind absolut stetig.

(c) Absolut stetige Funktionen sind von endlicher Variation, also insbesondere existiert F' fast überall.

(d) Wenn F absolut stetig ist, gibt es F_1, F_2, beide wachsend *und* absolut stetig, mit $F = F_1 - F_2$.

Beweis:

(a) Gilt nach Definition der absoluten Stetigkeit mit $n = 1$.

(b) Setze

$$E = \bigcup_k (a_k, b_k).$$

Es ist

$$m(E) = \sum (b_k - a_k) < \delta.$$

Damit ist

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} |F(b_k) - F(a_k)| &\leq \sum_{k=1}^{n} \int_{a_k}^{b_k} |f(t)|\, dt \\ &= \int_E |f(t)|\, dt \overset{\oplus}{<} \varepsilon.\end{aligned}$$

$\oplus$ gilt wegen der absoluten Stetigkeit des L-Integrals (10.5.15 auf Seite 284).

(c) Zu $\varepsilon = 1$ existiert ein δ mit ... (Definition).
Wähle $n \in \mathbb{N}$ mit $\frac{b-a}{\delta} \leq n$.
Sei Z Zerlegung von $[a, b]$:

$$\begin{aligned}(a + j \cdot h, a + (j+1) \cdot h) \setminus Z = (a_1, a_2) \cup (a_2, a_3) \cup \cdots \cup (a_m, b_m) \\ \sum_{k=1}^{m} (a_k - a_{k-1}) = h < \delta \\ \Rightarrow \sum_{k=2}^{n} |F(a_k) - F(a_{k-1})| < 1.\end{aligned}$$

Für jedes $j = 0, \ldots, n-1$ gilt:
$\Rightarrow \operatorname{var}(F, Z) < n$
$\Rightarrow V_a^b(F) \leq n$.

(d) In Analysis II wurde gezeigt, daß sich F, eine Funktion von endlicher Variation, folgendermaßen darstellen läßt:

$$F(x) - F(a) = p(x) - n(x).$$

Dabei ist p die positive und n die negative Variation:

$$p(x) = \sup\{\sum_{k=1}^{m} (F(x_k) - F(x_{k-1}))^+ \colon \{x_0, \ldots, x_m\} \text{ ist Zerlegung von } [a, x]\}$$

Zeige: p ist absolut stetig.
Sei $\varepsilon > 0$ und dazu $\delta > 0$ aus der absoluten Stetigkeit von F.
Zerlegung $\{x_0, \ldots, x_m\}$ von $[a, b]$ mit

$$p(b) < \varepsilon + \sum_{k=1}^{m} (F(x_k) - F(x_{k-1}))^+.$$

Seien $(a_1, b_1), \dots, (a_s, b_s) \subseteq [a, b]$ paarweise disjunkt mit

$$\sum_{k=1}^{s} b_k - a_k < \delta.$$

Es ist

$$Z_k = ((a_k, b_k) \cap Z) \cup \{a_k, b_k\} = \{t_0^k, t_1^k, \dots, t_{\ell_k}^k\}$$

und damit:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{s} \underbrace{p(b_k) - p(a_k)}_{\geq 0} &\overset{\text{ANA II}}{\leq} \sum_{k=1}^{s} \sum_{j=1}^{\ell_k} (F(t_j^k) - F(t_{j-1}^k))^+ + \varepsilon \\
&\leq \sum_{k=1}^{s} \sum_{j=1}^{\ell_k} |F(t_j^k) - F(t_{j-1}^k)| + \varepsilon.
\end{aligned}$$

(t_{j-1}^k, t_j^k) sind disjunkt für alle j und k,

$$\sum_{j,k} (t_j^k - t_{j-1}^k) = \sum_{k} b_k - a_k < \delta$$

$\Rightarrow$

$$\sum_{k=1}^{s} (p(b_k) - p(a_k)) < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon.$$

Also ist p absolut stetig.

10.8.9 Hauptsatz

$F\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ ist genau dann absolut stetig, wenn für das Lebesgue-Integral

$$F(x) = F(a) + \int_a^x f(t)\, dt$$

mit $f \in L([a, b])$ ist. Es gilt: $F'(x) = f(x)$ fast überall.

Beweis: Sei OBdA F monoton wachsend, bzw. $f \geq 0$ überall.

„$\Leftarrow$": Sei

$$F(x) = F(a) + \int_a^x f(t)\, dt$$

mt $f \in L$ und $f \geq 0$.
F ist wachsend und absolut stetig (siehe Beispiel (b)).
Zeige noch: $F'(x) = f(x)$ fast überall.
Zuerst: $f \in L^+$, es existiert eine Folge (φ_k) von Treppenfunktionen mit $\varphi_k \leq \varphi_{k+1}$, $\varphi_k \to f$ fast überall.
Setze

$$\Phi_k(x) = F(a) + \int_a^x \varphi_k(t)\, dt.$$

Es ist $\Phi_k'(x) = \varphi_k(X)$ außer in den Sprungstellen (Analysis I).
Mit $\Phi_0(x) = 0$ ist dann:

$$\sum_{k=1}^{\infty}(\Phi_k(x) - \Phi_{k-1}(x)) = \lim_{n\to\infty} \Phi_n(x)$$
$$= F(a) + \int_a^x f(t)\,dt = F(x).$$

Außerdem ist

$$\underbrace{\Phi_k(x) - \Phi_{k-1}(x)}_{\substack{\text{monoton}\\ \text{wachsende Funktion}}} = \int_a^x \underbrace{(\varphi_k(t) - \varphi_{k-1}(t))}_{\geq 0}\,dt \geq 0.$$

Damit gilt dann:

$$F'(x) \overset{\text{f.ü.}}{=} \sum_{k=1}^{\infty}(\Phi_k'(x) - \Phi_{k-1}'(x))$$
$$\overset{\text{f.ü.}}{=} \sum_{k=1}^{\infty}(\varphi_k(x) - \varphi_{k-1}(x)) = \lim_{k\to\infty} \varphi_k$$
$$\overset{\text{f.ü.}}{=} f(x).$$

„$\Rightarrow$“: Sei F absolut stetig und monoton.
F' existiert fast überall und es ist $F' \geq 0$.
Es wurde schon gezeigt, daß F' integrierbar ist mit

$$F(b) - F(a) \geq \int_a^b F'(t)\,dt.$$

Setze

$$\Phi(x) := \int_a^x F'(t)\,dt.$$

$h(x) := F(x) - \Phi(x)$ ist als Differenz zweier absolut stetiger Funktionen absolut stetig und monoton wachsen, denn für $a \leq x < y \leq b$ gilt:

$$h(y) - h(x) = F(y) - F(x) - \int_x^y F'(t)\,dt \geq 0.$$

Nach dem 1. Teil des Beweises ist

$$h' = f' - \Phi' = F' - F' = 0 \text{ fast überall.}$$

Zeige noch, daß h konstant ist. Setze

$$N = \{x\colon h'(x) \text{ existiert oder ist größer als } 0\}.$$

N ist Nullmenge. Sei $\varepsilon > 0$. Dazu gehöre aus der absoluten Stetigkeit von h ein $\delta > 0$. Dann existieren (α_ν, β_ν) mit

$$N \subseteq \bigcup_\nu (\alpha_\nu, \beta_\nu)$$

und
$$\sum_{\nu} \beta_\nu - \alpha_\nu < \delta.$$
Für $n \in \mathbb{N}$ gilt (mit der absoluten Stetigkeit von h):
$$\sum_{\nu=1}^{n} \beta_\nu - \alpha_\nu < \delta \;\Rightarrow\; \sum_{\nu=1}^{n} h(\beta_\nu) - h(\alpha_\nu) < \varepsilon.$$
Für $n \to \infty$ gilt:
$$\sum_{\nu=1}^{\infty} h(\beta_\nu) - h(\alpha_\nu) \leq \varepsilon.$$
Daraus folgt:
$$m\left(h\left(\bigcup_{\nu}(\alpha_\nu, \beta_\nu)\right)\right) \leq \sum_{\nu} h(\beta_\nu) - h(\alpha_\nu) \leq \varepsilon.$$
Sei $x \in (a,b) \setminus N = E$. Dann existiert ein $\xi > x$ mit
$$\frac{h(\xi) - h(x)}{\xi - x} < \varepsilon,$$
da $h'(x) = 0$ ist. Also existiert ein $\xi > x$ mit
$$h(\xi) - \varepsilon \cdot \xi > h(x) - \varepsilon \cdot x.$$
Nach dem Sunrise-Lemma gilt dann:
$$E = \bigcup_{k}(a_k, b_k)$$
mit
$$\begin{gathered} h(a_k) - \varepsilon \cdot a_k = h(b_k) - \varepsilon \cdot b_k \\ h(b_k) - h(a_k) = \varepsilon \cdot (b_k - a_k) \\ h([a,b]) \subseteq \{a,b\} \cup \bigcup_{\nu}(h(\alpha_\nu), h(\beta_\nu)) \cup \bigcup_{k}(h(a_k), h(b_k)) \end{gathered}$$
und
$$\begin{aligned} m(h([a,b])) &\leq \sum_{\nu} h(\beta_\nu) - h(\alpha_\nu) + \sum_{k} \underbrace{h(b_k - h(a_k)}_{=\varepsilon\cdot(b_k - a_k)} \\ &\leq \varepsilon + \varepsilon(b-a). \end{aligned}$$
Also ist $m(h([a,b])) = 0 = m([h(a), h(b)])$.
Also ist $h(a) = h(b)$, d. h. h ist konstant (h ist monoton wachsend).

10.8.10 Folgerungen aus dem Hauptsatz

Folgerung 1: Absolut stetige Funktionen sind nullmengentreu, d. h.
$$m(N) = 0 \;\Rightarrow\; m(F(N)) = 0.$$

Folgerung 2: Ist F stetig und von endlicher Variation auf $[a,b]$, so ist $F = \Phi + G$ mit absolut stetigem Φ und G von endlicher Variation mit $G' = 0$ fast überall.

Beweis:

Folgerung 1: Als Aufgabe:

$$m(F(N)) \leq \int\limits_N |F'(x)|\, dx = 0.$$

Folgerung 2: (Beweis des Hauptsatzes)
F' existiert fast überall, $F' \in L([a,b])$ und

$$\Phi(x) = \int\limits_a^x F'(t)\, dt$$

ist absolut stetig.
$G := F - \Phi$ ist von endlicher Variation und $G' = F' - \Phi' = 0$ fast überall.