11 Vektoranalysis[1]

11.1 Der Gaußsche Integralsatz im $\mathbb{R}^2$

11.1.1 Definition: Normalbereich

Ein y-*Normalbereich* $B \subseteq \mathbb{R}^2$ ist eine Menge

$$B = \{(x,y)\colon a \leq x \leq b,\ \varphi(x) \leq y \leq \psi(x)\},$$

wobei φ und ψ stückweise C^1 sind, sowie $\varphi(x) < \psi(x)$ in (a,b) ist. ∂B wird als geschlossene Kurve

$$\gamma_1 + \gamma_2 - \gamma_3 - \gamma_4$$

aufgefaßt. Dabei ist

$$\begin{aligned}
\gamma_1\colon & \begin{pmatrix} t \\ \varphi(t) \end{pmatrix},\ a \leq t \leq b \\
\gamma_2\colon & \begin{pmatrix} b \\ t \end{pmatrix},\ \varphi(b) \leq t \leq \psi(b) \\
\gamma_3\colon & \begin{pmatrix} t \\ \psi(t) \end{pmatrix},\ a \leq t \leq b \\
\gamma_4\colon & \begin{pmatrix} a \\ t \end{pmatrix},\ \varphi(a) \leq t \leq \psi(a)
\end{aligned}$$

11.1.2 Integralsatz von Gauß

Sei B ein xy-Normalbereich, $u, v\colon B \to \mathbb{R}$ seien stetig und u_x, v_y seien stetig und beschränkt in B^0. Dann gilt:

$$\int\limits_B (u_x + v_y)\,d(x,y) = \int\limits_{\partial B} u\,dy - v\,dx$$

Beweis

$$\begin{aligned}
\int\limits_B v_y\,d(x,y) &= \int\limits_a^b \left(\int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} v_y(x,y)\,dy \right) dx = \int\limits_a^b v(x,\psi(x))\,dx - \int\limits_a^b v(x,\varphi(x))\,dx \\
&= \int\limits_a^b v(t,\psi(t))\,dt - \int\limits_a^b v(t,\varphi(t))\,dt \\
&= -\int\limits_{-\gamma_3} v(x,y)\,dx - \int\limits_{\gamma_1} v(x,y)\,dx
\end{aligned}$$

[1] Version 191 vom 13. Februar 2006

Außerdem ist

$$\int\limits_{\gamma_2} v(x,y)\,dx = \int\limits_{\varphi(b)}^{\psi(b)} v(b,t)\cdot 0\,dt = 0 = \int\limits_{\gamma_4} v(x,y)\,dx = 0.$$

Zusammen gilt also:

$$\int\limits_{B} v_y\,d(x,y) = \int\limits_{\partial B} -v\,dx.$$

Genauso wird gezeigt, daß

$$\int\limits_{B} u_x\,d(x,y) = \int\limits_{\partial B} u\,dy$$

ist.✓

11.1.3 Bemerkungen

(a) Der Satz von Gauß gilt für Normalbereiche $B = B_1 \cup B_2 \cup \cdots \cup B_m$, mit xy-Normalbereichen B_j, wobei $B_j^0 \cap B_k^0 = \emptyset$ für $j \neq k$ ist.

(b) Sei $f = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ ein Vektorfeld. Dann heißt

$$\operatorname{div} f = u_x + v_y$$

Divergenz von f.

(c) ∂B sei parametrisiert nach der Bogenlänge:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Phi(s) \\ \Psi(s) \end{pmatrix}, \quad 0 \leq s \leq L(\partial B) = \text{Länge von } \partial B$$

Es ist dabei

$$\big(\Phi'(s)\big)^2 + \big(\Psi'(s)\big)^2 = 1$$

(außer für endlich viele s).
Der Tangentialvektor von ∂B an der Stelle s_0 ist

$$\begin{pmatrix} \Phi'(s_0) \\ \Psi'(s_0) \end{pmatrix}$$

An dieser Stelle gilt für den Normalenvektor ν:

$$\nu = \begin{pmatrix} \Psi'(s_0) \\ -\Phi'(s_0) \end{pmatrix}, \qquad \|\nu\| = 1$$

Damit ist dann:

$$\begin{aligned} \int\limits_{\partial B} u\,dy - v\,dx &= \int\limits_{0}^{L(\partial B)} \big(u\cdot\Psi' - v\cdot\Phi'\big)\,ds \\ &= \int\limits_{0}^{L(\partial B)} f\cdot\nu\,ds \end{aligned}$$

(d) Divergenzsatz (Zusammenfassung von (b) und (c)):

$$\int\limits_{B} \operatorname{div} f\,d(x,y) = \int\limits_{\partial B} \nu\cdot f\,ds$$

11.1.4 Folgerung: Fläche eines Normalbereiches

Ein Normalbereich hat das Maß

$$m(B) = \int_{\partial B} x\,dy = -\int_{\partial B} y\,dx = \frac{1}{2}\int_{\partial B} x\,dy - y\,dx$$

Beweis: Wähle

$$f = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} \text{ oder } \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix} \text{ oder } \frac{1}{2}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Für alle diese Funktionen ist

$$\operatorname{div} f = 1.$$

Deshalb ist

$$m(B) = \int_B 1\,d(x,y) \int_{\partial B} x\,dy = \cdots$$

11.1.5 Beispiel: Fläche einer Ellipse

Zu berechnen sei die Fläche einer Ellipse

$$B = \left\{ (x,y) \colon \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1 \right\}.$$

Für den Rand der Ellipse gilt:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Setze für $0 \leq t \leq 2\pi$

$$\begin{aligned} x &= a\cos t \\ y &= b\sin t. \end{aligned}$$

Es ist dann

$$\begin{aligned} m(B) &= \int_{\partial B} \frac{1}{2}(x\,dy - y\,dx) \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} a\cos t \cdot b\cos t - b\sin t \cdot a(-\sin t)\,dt \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} a \cdot b\,dt \\ &= \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot 2\pi = \pi \cdot a \cdot b \end{aligned}$$

11.1.6 Leibnizsche Sektorformel

Sei S ein Sektor, der von einem C^1-Jordanbogen γ begrenzt wird (siehe Abbildung 11.1) Es ist dann:

$$m(S) = \frac{1}{2}\int_\gamma x\,dy - y\,dx$$

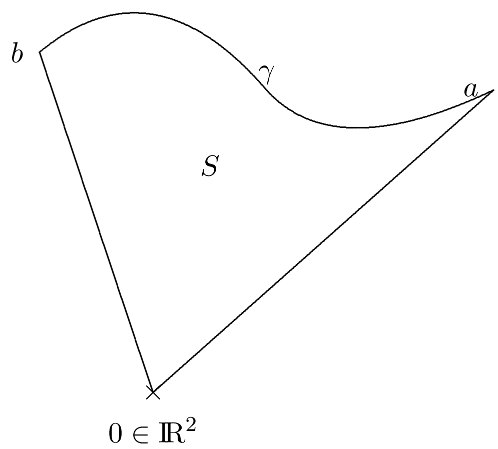


Abbildung 11.1: Sektor im $\mathbb{R}^2$ zur Verdeutlichung der Leibnizschen Sektorformel

Beweis: falls S Normalbereich:

$$\partial S = \overline{0a} + \gamma + \overline{b0}$$

Für die Strecke $0a$ gilt

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 t \\ a_2 t \end{pmatrix}, \quad \text{mit } 0 \leq t \leq 1 \text{ und } a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}.$$

Damit ist dann:

$$x\,dy - y\,dx = a_1 t a_2\,dt - a_2 t a_1\,dt = 0\,dt$$
$$\Rightarrow m(S) = \int\limits_{\partial B} \frac{1}{2}(x\,dy - y\,dx) = \int\limits_{\gamma} \frac{1}{2}(x\,dy - y\,dx)$$

11.1.7 Beispiel zu Gauß

Sei $D \subseteq \mathbb{R}^2$ ein Gebiet und seien $u, v \in C^1(D)$.
Zusätzlich sollen die Cauchy-Riemann-Gleichungen gelten:

$$u_x = v_y \quad \text{und} \quad u_y = -v_x$$

$$\Rightarrow u_x - v_y = 0$$

Sei nun $B \subseteq D$ Normalbereich.
Dann folgt mit Gauß für u und $-v$:

$$0 = \int\limits_{B} (u_x - v_y)\,d(x, y) = \int\limits_{\partial B} u\,dy + v\,dx$$

und für v und u:

$$0 = \int\limits_{B} (v_x + u_y)\,d(x, y) = \int\limits_{\partial B} v\,dy - u\,dx$$

Setze nun $z = x + iy$ und

$$f(z) := u(x, y) + i \cdot v(x, y).$$

f heißt differenzierbar in z, wenn für $h \in \mathbb{C}$

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} =: f'(z)$$

existiert.
f heißt *holomorph*, wenn f im gesamten Definitionsbereich differenzierbar ist. f diffbar $\Rightarrow$ Cauchy-Riemann gilt (Aufgabe). Beschreibe den Rand von B mit

$$\partial B\colon \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi(t) \\ \psi(t) \end{pmatrix}, \quad a \le t \le b.$$

Komplex ist dann:

$$z = \varphi(t) + i \cdot \psi(t)$$

$$\begin{aligned} \int\limits_{\partial B} f(z)\, dz &:= \int\limits_{\partial B} (u + iv)(\varphi' + i\psi')\, dt \\ &= \int\limits_a^b (u\varphi' - v\psi')\, dt + i \int\limits_a^b (u\psi' + v\varphi')\, dt \\ &= \int\limits_{\partial B} u\, dx - v\, dy + i \int\limits_{\partial B} u\, dy + v\, dx = 0 \end{aligned}$$

(Cauchy'scher Integralsatz)

11.1.8 Die Greenschen Formeln

Sei $D \subseteq \mathbb{R}^2$ ein Gebiet, $B \subseteq D$ ein Normalbereich und $u, v\colon D \to \mathbb{R}$. Dann gelten

1. $(u \in C^1(D),\ v \in C^2(D))$

$$\int\limits_B (u \triangle v + (\operatorname{grad} u) \cdot (\operatorname{grad} v))\, d(x,y) = \int\limits_{\partial B} u \frac{\partial v}{\partial \nu}\, ds$$

2. $(u, v \in C^2(D))$

$$\int\limits_B (u \triangle v - v \triangle u)\, d(x,y) = \int\limits_{\partial B} \left(u \frac{\partial v}{\partial \nu} - v \frac{\partial u}{\partial \nu} \right) ds$$

mit dem Laplace-Operator $\triangle$:

$$\triangle u := u_{xx} + u_{yy}$$

und ν, der äußeren Normalen von ∂B.

Beweis

1. Setze

$$f = \begin{pmatrix} u \cdot v_x \\ u \cdot v_y \end{pmatrix}.$$

   Dann ist

$$\begin{aligned} \operatorname{div} f = (uv_x)_x + (uv_y)_y &= u_x v_x + u v_{xx} + u_y v_y + u v_{yy} \\ &= u \triangle v + (\operatorname{grad} u) \cdot (\operatorname{grad} v) \end{aligned}$$

Mit $\nu = \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \end{pmatrix}$ gilt dann:

$$\begin{aligned} f \cdot \nu &= u(v_x \cdot \nu_1 + v_y \cdot \nu_2) \\ &= u \cdot (\operatorname{grad} v) \cdot \nu \\ &= u \cdot \frac{\partial v}{\partial \nu} (\text{Richtungsableitung}) \end{aligned}$$

Gaußschen Satz anwenden:✓

2. Folgt aus 1.: u und v vertauschen, dann beide Integrale voneinander abziehen.

11.1.9 Definition: harmonisch, Potentialfunktion

$u \in C^2(D)$ heißt *harmonisch* oder *Potentialfunktion*, wenn $\triangle u = 0$ in D.

11.1.10 Gaußsche Mittelwertformel

Sei u harmonisch in D, $(x_0, y_0) \in D$. Dann gilt

$$u(x_0, y_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(x_0 + r\cos\theta, y_0 + r\sin\theta)\, d\theta$$

für $0 < r < r_0(x_0, y_0)$.

Beweis: Sei OBdA $(x_0, y_0) \equiv (0,0)$:
2. Greensche Formel für $v \equiv 1$:

$$\int_{\partial B} \frac{\partial u}{\partial \nu}\, ds = 0$$

Setze $B = K(0, r)$: Dann ist

$$\partial B\colon \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos\theta \\ r\sin\theta \end{pmatrix}, \quad 0 \le \theta \le 2\pi$$

Für den Normalenvektor gilt:

$$\nu = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}$$

Mit $ds = r\, d\theta$ gilt dann:

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^{2\pi} (u_x \cdot \cos\theta + u_y \cdot \sin\theta) \qquad |u_x(r\cos\theta, r\sin\theta) \\ 0 &= \int_0^{2\pi} \frac{\partial}{\partial r} u(r\cos\theta, r\sin\theta)\, d\theta \\ &= \frac{d}{dr} \int_0^{2\pi} u(r\cos\theta, r\sin\theta)\, d\theta \\ &\Rightarrow \int_0^{2\pi} u(r\cos\theta, r\sin\theta)\, d\theta = \text{const} \quad \text{für } 0 < r < r_0 \end{aligned}$$

Für $r \to 0$ geht das Integral gegen $u(0,0) \cdot 2\pi$.

11.1.11 Minimum- Maximum-Prinzip

Ist u stetig in $\overline{D}$ und harmonisch in D, so ist u konstant oder

$$\min_{\partial D} u < u(x,y) < \max_{\partial D} u \text{ für } (x,y) \in D.$$

Beweis: Für max. (Für min betrachte $-u$): Setze

$$\begin{aligned} M &= \max_{\overline{D}} u \\ A &= \{(x,y) \in D \colon u(x,y) = M\} \\ B &= D - A = \{(x,y) \in D \colon u(x,y) < M\} \end{aligned}$$

B ist offen, da u stetig ist.
Sei nun $(x_0, y_0) \in A$:

$$\begin{aligned} M &= u(x_0, y_0) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \underbrace{u(x_0 + r\cos\theta, y_0 + r\sin\theta}_{\leq M} \, d\theta \text{ für } 0 < r < r_0 \\ &\leq M \end{aligned}$$

Da u stetig ist, gilt für $0 \leq \theta \leq 2\pi$, $0 \leq r < r_0$:

$$u(x_0 + r\cos\theta, y_0 + r\sin\theta) = M.$$

Das heißt, daß $K((x_0, y_0), r_0) \subseteq A$, A offen.
Da $A \cap B = \emptyset$ und D zusammenhängend, folgt:
$\Rightarrow$ 1. Alternative: $A = \emptyset$, $B = D$: $u < M$ in D.
$\Rightarrow$ 2. Alternative: $B = \emptyset$, $A = D$: $u = M$ in D.

11.2 Flächen im $\mathbb{R}^3$

11.2.1 Definition: Vektorprodukt

Für $a, b \in \mathbb{R}^3$,

$$a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

heißt

$$a \times b = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_1 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$$

Vektorprodukt oder *Kreuzprodukt*.
Mit den Einheitsvektoren e^1, e^2 und e^3 ist

$$a \times b = \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} e^1 - \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} e^2 + \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} e^3.$$

Symbolisch geschrieben:

$$a \times b = \begin{vmatrix} e^1 & a_1 & b_1 \\ e^2 & a_2 & b_2 \\ e^3 & a_3 & b_3 \end{vmatrix}$$

11.2.2 Bemerkungen/Regeln

Seien $a, b, c \in \mathbb{R}^3$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

(a) $a \times b = -b \times a$.

(b) $(\lambda a + \mu b) \times c = \lambda(a \times c) + \mu(b \times c)$.

(c) $a \times (b \times c) = (a \cdot c)b - (a \cdot b)c$.

(d)
$$(a \times b) \cdot c = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \det(a, b, c).$$

(e) $a \times b = 0 \iff a, b$ sind linear abhängig.

(f) $a \times b$ ist orthogonal zu a und b, also auch zu
$$E = \{\lambda a + \mu b \colon \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}.$$

(g) Seien a und b linear unabhängig und
$$P = \{\lambda a + \mu b \colon 0 \leq \lambda, \mu \leq 1\}$$
das von a und b aufgespannte Parallelotop. Dann ist
$$\begin{aligned} \det(a, b, a \times b) =& \text{3-dimensionales Volumen von} \\ & \{\lambda a + \mu b + \nu(a \times b) \colon 0 \leq \lambda, \mu, \nu \leq 1\} \\ =& \text{Fläche von } P = \|a \times b\|^2. \end{aligned}$$
Damit ist
$$\det(a, b, a \times b) = (a \times b) \cdot (a \times b) = \|a \times b\|^2$$
und
$$\text{Fläche von } P = \|a \times b\|$$

11.2.3 Def.: Parameterdarstellung eines Flächenstücks

Sei $D \subseteq \mathbb{R}^2$ ein beschränktes Gebiet, $\Phi \colon D \to \mathbb{R}^3$ heißt *Parameterdarstellung* des Flächenstücks $\Phi(D)$, wenn gilt:

1) Φ ist stetig differenzierbar, $\operatorname{rg} \Phi' = 2$ überall,

2) Φ ist injektiv.

Die Ebene durch den Punkt $\Phi(u, v)$,
$$\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \Phi(u, v) + \lambda \Phi_u(u, v) + \mu \Phi_v(u, v) \colon \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\}$$
heißt Tangentialebene im Punkt $\Phi(u, v)$.
$$\nu = \frac{\Phi_u \times \Phi_v}{\|\Phi_u \times \Phi_v\|}$$
ist der Normalenvektor an $\Phi(D)$. ν steht senkrecht auf der Tangentialebene.

11.2.4 Explizite Fläche

„$z = \varphi(x, y)$“: Sei $\varphi \in C^1(D)$, $\varphi\colon D \to \mathbb{R}$.
Setze

$$\Phi(u, v) = \begin{pmatrix} u \\ v \\ \varphi(u, v) \end{pmatrix}.$$

Es ist dann

$$\Phi' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \varphi_u & \varphi_v \end{pmatrix}, \quad \operatorname{rg} \Phi' = 2,$$

$$\Phi_u \times \Phi_v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \varphi_u \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \varphi_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\varphi_u \\ -\varphi_v \\ 1 \end{pmatrix}$$

und

$$\nu = \frac{1}{\sqrt{1 + \varphi_u^2 + \varphi_v^2}} \cdot \begin{pmatrix} -\varphi_u \\ -\varphi_v \\ 1 \end{pmatrix}.$$

11.2.5 Mantelfläche

γ sei ein ebener Jordanbogen mit

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi(s) \\ \psi(s) \end{pmatrix}, \quad a \le s \le b.$$

$$s \longmapsto \begin{pmatrix} \varphi(s) \\ \psi(s) \end{pmatrix}$$

ist injektiv, $\varphi, \psi \in C^1([a, b])$.
Seien $\alpha, \beta\colon (a, b) \to \mathbb{R}$, C^1, $\alpha < \beta$.
Wähle

$$D = \{(s, t)\colon a < s < b,\, \alpha(s) < t < \beta(s)\}$$

und die Parameterdarstellung

$$\Phi(s, t) = \begin{pmatrix} \varphi(s) \\ \psi(s) \\ t \end{pmatrix}$$

mit

$$\Phi_s \times \Phi_t = \begin{pmatrix} \varphi' \\ \psi' \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi'(s) \\ -\varphi'(s) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

11.2.6 Rotationsfläche

„$r = r(x)$“: Sei $r\colon (a, b) \to (0, \infty)$ stetig differenzierbar. Rotiere den Graphen von r um die x-Achse.
Wähle

$$D = \{(t, \theta)\colon a < t < b,\, 0 < \theta < 2\pi\} \subseteq \mathbb{R}^2.$$

Dann ist

$$\Phi(t, \theta) = \begin{pmatrix} t \\ r(t)\cos\theta \\ r(t)\sin\theta \end{pmatrix}$$

die Parameterdarstellung einer Rotationsfläche mit

$$\Phi_t \times \Phi_\theta = \begin{pmatrix} 1 \\ r'(t)\cos\theta \\ r'(t)\sin\theta \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ -r(t)\sin\theta \\ r(t)\cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r(t)\cdot r'(t) \\ -r(t)\cos\theta \\ -r(t)\sin\theta \end{pmatrix}.$$

11.2.7 Satz

Stellen $\Phi\colon D \to \mathbb{R}^3$ und $\Psi\colon G \to \mathbb{R}^3$ dasselbe Flächenstück $\mathcal{F} = \Phi(D) = \Psi(G)$ dar, dann gibt es einen Diffeomorphismus $h\colon D \to G$ (h injektiv, C^1 und h^{-1} ebenfalls injektiv und C^1) mit $\Phi = \Psi \circ h$.

Beweis: Definiere $h = \Psi^{-1} \circ \Psi$. Zeige: $h \in C^1$.
Es ist $\operatorname{rg} \Psi' = 2$. Sei $(s_0, t_0) \in G$: Dann gilt z. B.

$$\det \begin{pmatrix} \frac{\partial \Psi_1}{\partial s} & \frac{\partial \Psi_2}{\partial s} \\ \frac{\partial \Psi_1}{\partial t} & \frac{\partial \Psi_2}{\partial t} \end{pmatrix} \neq 0 \text{ in } (s_0, t_0).$$

Setze

$$\overline{\Phi} = \begin{pmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \end{pmatrix}, \qquad \overline{\Psi} = \begin{pmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \end{pmatrix}.$$

$\overline{\Psi}$ hat Umkehrfunktion in einer Umgebung von $\overline{\Psi}(s_0, t_0) = (u_0, v_0)$.
$\overline{\Psi}^{-1}$ ist C^1 (Satz über die Umkehrfunktion bei mehreren Veränderlichen).
$\overline{\Psi}^{-1} \circ \overline{\Phi}$ ist C^1 in einer Umgebung von (u_0, v_0).
Es gilt: $h = \overline{\Psi}^{-1} \circ \overline{\Phi}$ in Umgebung von (u_0, v_0).
Es ist $\overline{\Phi} = \overline{\Psi} \circ h$ nach Definition.

$$\left.\begin{array}{l} \Phi_1 = \Psi_1 \circ h \\ \Phi_2 = \Psi_2 \circ h \end{array}\right\} \overline{\Phi} = \overline{\Psi} \circ h,\ h = \overline{\Psi}^{-1} \circ \overline{\Phi}$$

$\Phi_3 = \Psi_3 \circ h$
Dasselbe für $h^{-1} = \Phi^{-1} \circ \Psi$, also ist auch h^{-1} in C^1.

11.2.8 Zusatz

Es gilt:

$$\Phi_u \times \Phi_v = (\Psi_s \times \Psi_t) \circ h \cdot \det h'.$$

Beweis: Es ist $\Phi = \Psi \circ h$.
Damit ist $\Phi' = \Psi' \circ h \cdot h'$. Setze

$$\Phi' = (\Phi_u, \Phi_v) =: (a, b)$$
$$\Psi' = (\Psi_x, \Psi_t) =: (c, d)$$

und

$$h' = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}.$$

Dabei sei

$$a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \ldots$$

Damit ist

$$a = c_{11}c + c_{21}d$$
$$b = c_{12}c + c_{22}d$$

Daraus folgt dann:

$$\begin{aligned}\Phi_u \times \Phi_v = a \times b &= c_{11}c_{22}(c \times d) + c_{21}c_{12}(d \times c)\\ &= (c_{11}c_{22} - c_{21}c_{12})(c \times d) = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{vmatrix}(c \times d)\end{aligned}$$

11.2.9 Definition: Flächenintegral, Oberfläche

Ist $\mathcal{F}$ ein Flächenstück und $f\colon \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ stetig, so heißt

$$\int\limits_{\mathcal{F}} f\,do := \int\limits_{D} f(\Phi(u,v))\|\Phi_u \times \Phi_v\|\,d(u,v)$$

Oberflächenintegral von f über $\mathcal{F}$, und

$$\int\limits_{\mathcal{F}} do = \int\limits_{D} \|\Phi_u \times \Phi_v\|\,d(u,v)$$

die Oberfläche von $\mathcal{F}$ (Flächeninhalt).

11.2.10 Satz

Die Definition von

$$\int\limits_{\mathcal{F}} f\,do$$

ist unabhängig von der Parameterdarstellung Φ.

Beweis: Seien $\Phi\colon D \to \mathcal{F}$ und $\Psi\colon G \to \mathcal{F}$ zwei Darstellungen von $\mathcal{F}$. Es ist dann $\Phi = \Psi \circ h$ und

$$\Phi_u \times \Phi_v = (\Psi_s \times \Psi_t) \circ h \cdot \det h'.$$

Damit ist

$$\|\Phi_u \times \Phi_v\| = \|(\Psi_s \times \Psi_t) \circ h\| \cdot |\det h'|$$

und mit der Transformationsformel gilt:

$$\begin{aligned}&\int\limits_{D} f(\Phi(u,v))\|\Phi_u \times \Phi_v\|\,d(u,v)\\ &\quad = \int\limits_{D} f(\Psi(h(u,v))) \cdot \|(\Psi_s \times \Psi_t) \circ h(u,v)\| \cdot |\det h'(u,v)|\,d(u,v)\\ &\quad = \int\limits_{G} f(\Psi(s,t))\|\Psi_s \times \Psi_t\|\,d(s,t)\end{aligned}$$

11.2.11 Beispiele

Explizite Fläche: Sei $z = \varphi(x,y)$, $\varphi \in C^1(D)$. Dann ist

$$\int_{\mathcal{F}} f\,do = \int_D f(x,y,\varphi(x,y))\sqrt{1 + (\varphi_x(x,y))^2 + (\varphi_y(x,y))^2}\,d(x,y)$$

Konkret: Oberfläche der nördlichen Halbkugel: Setze

$$z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$$

für

$$(x,y) \in D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 + y^2 < 1\right\}.$$

Damit gilt dann:

$$\begin{aligned}
\text{Oberfläche} &= \int_D \sqrt{1 + \frac{x^2+y^2}{1-x^2-y^2}}\,d(x,y) = \int_D \frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}\,d(x,y) \\
&= \left|\begin{matrix}\text{Polarkoordinaten:} \\ x = r\cos t \\ y = r\sin t\end{matrix}\right| = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \frac{1}{\sqrt{1-r^2}} r\,d\theta\,dr \\
&= 2\pi \int_0^1 \frac{r}{\sqrt{1-r^2}}\,dr = 2\pi \left(-\sqrt{1-r^2}\right)\Big|_0^1 = 2\pi
\end{aligned}$$

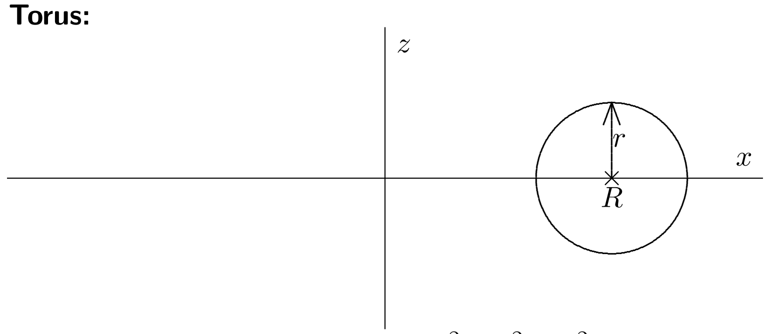
Rotationsfläche: $r = r(x)$:

$$\int_{\mathcal{F}} f\,do = \int_a^b \int_0^{2\pi} f(t, r(t)\cos\theta, r(t)\sin\theta) r(t) \cdot \sqrt{1 + (r'(t))^2}\,d\theta\,dt$$

Mantelfläche:

$$\int_{\mathcal{F}} f\,do = \int_a^b \int_{\alpha(s)}^{\beta(s)} f(\varphi(s), \psi(s), t)\sqrt{q + (\varphi'(s))^2 + (\psi'(s))^2}\,dt\,ds$$

z. B. Torus:



Darstellung der Kreislinie: $(x-R)^2 + z^2 = r^2$, $y = 0$.
Polarkoordinaten der Kreislinie:

$$\begin{aligned}
x &= R + r\cos\theta \\
y &= 0 \\
z &= r\sin\theta
\end{aligned}$$

Darstellung des Torus:

$$\Phi(\theta,\varphi) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (R + r\cos\theta)\cdot\cos\varphi \\ (R + r\cos\theta)\cdot\sin\varphi \\ r\sin\theta \end{pmatrix}$$

mit $0 < \varphi < 2\pi$ und $0 < \theta < 2\pi$. Dann ist

$$\begin{aligned}
\Phi_\theta \times \Phi_\varphi &= \begin{pmatrix} -r\sin\theta\cdot\cos\varphi \\ -r\sin\theta\cdot\sin\varphi \\ r\cos\theta \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} (R + r\cos\theta)(-\sin\varphi) \\ (R + r\cos\theta)(\cos\varphi) \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -r(R + r\cos\theta)\cos\theta\cdot\cos\varphi \\ r(R + r\cos\theta)\cos\theta\cdot\sin\varphi \\ r(R + r\cos\theta)\sin\theta\cdot(-1) \end{pmatrix} \\
\|\Phi_\theta \times \Phi_\varphi\| &= r(R + r\cos\theta)\cdot 1
\end{aligned}$$

Für die Oberfläche gilt dann:

$$\begin{aligned}
\text{Oberfläche} &= \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} r(R + r\cos\theta)\, d\theta\, d\varphi \\
&= 2\pi\left(2\pi\cdot r\cdot R + r\int_0^{2\pi}\cos\theta\, d\theta\right) = (2\pi R)(2\pi r)
\end{aligned}$$

11.2.12 Bemerkungen

(a)

$$\int_{\mathcal{F}} f\, do$$

heißt auch *nichtorientiertes Flächenintegral.*

(b) Sei $\mathcal{F}$ ein Flächenstück, $\Phi\colon D \to \mathcal{F}$, $\nu = \frac{\Phi_u\times\Phi_v}{\|\Phi_u\times\Phi_v\|}$.
$g\colon \mathcal{F} \to \mathbb{R}^3$ sei Vektorfeld mit $g = (g_1, g_2, g_3)^T$.

$$\int_F g\cdot\nu\, do$$

ist wohldefiniert und ist das *orientierte* Flächenintegral.
Sei jetzt $\Psi\colon G \to \mathcal{F}$ eine zweite Darstellung der Fläche mit $\Phi = \Psi\circ h$, $h\colon D \to G$ ist Diffeomorphismus und es gilt

$$\Phi_u \times \Phi_v = (\Psi_s \times \Psi_t)\circ g\cdot\det h'$$

$$\frac{\Phi_u \times \Phi_v}{\|\Phi_u \times \Phi_v\|} = \frac{\Psi_s \times \Psi_t}{\|\Psi_s \times \Psi_t\|}. \qquad \underbrace{\frac{\det h'}{|\det h'|}}_{\equiv +1 \text{ oder } -1 \text{ überall}}$$

Das heißt, daß das Vorzeichen von ν von Φ abhängt.

(c) Sind $\mathcal{F}_1, \ldots, \mathcal{F}_m$ Flächenstücke mit $\mathcal{F}_j \cap \mathcal{F}_k = \emptyset$ für $j \neq k$, so setzt man

$$\int_{\mathcal{F}_1\cup\cdots\cup\mathcal{F}_m} f\, do := \sum_{j=1}^m \int_{\mathcal{F}_j} f\, do.$$

11.3 Integralsätze (Gauß, Stokes) im $\mathbb{R}^3$

11.3.1 Definition/Motivation

Ein z-Normalbereich $B \subseteq \mathbb{R}^3$ ist eine Menge der Form

$$B = \{(x, y, z) \colon \varphi(x, y) < z < \psi(x, y),\ (x, y) \in D\}$$

mit einem Gebiet $D \subseteq \mathbb{R}^2$, das von einer stückweise C^1-Kurve berandet ist und mit stetig differenzierbaren $\phi, \psi \colon D \to \mathbb{R}$, $\varphi(x, y) < \psi(x, y)$ in D und φ, ψ stetig in $\overline{D}$.
Der Rand ∂B wird aufgefaßt als Vereinigung von drei Flächenstücken: dem Mantel, dem Boden und dem Deckel.
Der Mantel M ist

$$M = \{(x, y, z) \colon (x, y) \in \partial D,\ \varphi(x, y) < z < \psi(x, y)\}\,.$$

Die Normale ν am Mantel ist

$$\nu = \begin{pmatrix} * \\ * \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Der Boden F_u ist

$$F_u = \{(x, y, \varphi(x, y)) \colon (x, y) \in D\}\,.$$

Die Normale ν am Boden ist

$$\nu = \frac{1}{\sqrt{1 + \varphi_x^2 + \varphi_y^2}} \begin{pmatrix} \varphi_x(x, y) \\ \varphi_y(x, y) \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Der Deckel F_o ist

$$F_O = \{(x, y, \psi(x, y)) \colon (x, y) \in D\}\,.$$

Die Normale ν am Deckel ist

$$\nu = \frac{1}{\sqrt{1 + \psi_x^2 + \psi_y^2}} \begin{pmatrix} -\psi_x(x, y) \\ -\psi_y(x, y) \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Sei nun $w \colon \overline{B} \to \mathbb{R}$ stetig, w_z stetig in B und beschränkt. Dann ist

$$\begin{aligned}
\int_B w_z(x, y, z)\, d(x, y, z) &= \int_D \left(\int_{\varphi(x,y)}^{\psi(x,y)} w_z\, dz \right) d(x, y) \\
&= \int_D w(x, y, \psi(x, y))\, d(x, y) - \int_D w(x, y, \varphi(x, y))\, d(x, y) \\
&= \int_D w(x, y, \psi(x, y)) \cdot \nu_3 \cdot \sqrt{1 + \psi_x^2 + \psi_y^2}\, d(x, y) \\
&\quad - \int_D w(x, y), \varphi(x, y)) \cdot \nu_3 \cdot \sqrt{1 + \varphi_x^2 + \varphi_y^2}\, d(x, y) \\
&= \int_{F_o} w \cdot \nu_3\, do + \int_{F_u} w \cdot \nu_3\, do + \underbrace{\int_M w \cdot \nu_3\, do}_{=0, \text{ da } \nu_3 = 0}
\end{aligned}$$

$$= \int_{\partial B} w \cdot \nu_3 \, do \text{ (Nach Definition)}$$

11.3.2 Integralsatz von Gauß im $\mathbb{R}^3$

$$\int_B \operatorname{div} f \, d(x,y,z) = \int_{\partial B} f \cdot \nu \, do$$

Dabei gilt:
$B \subseteq \mathbb{R}^3$ ist ein xyz-Normalbereich,
$f = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}$ ist ein C^1-Vektorfeld in B, stetig auf $\overline{B}$,
u_x, v_y, w_z seien beschränkt,
∂B wird als Vereinigung von Flächen aufgefaßt, ν =Normale zur Fläche ∂B und

$$\operatorname{div} f = u_x + v_y + w_z$$

Beweis: ✓, siehe oben, fasse für alle drei Richtungen zusammen.

11.3.3 Bemerkung

1) Die Greenschen Formeln (siehe 11.1.8 auf der Seite 319) gelten auch hier (mit $\triangle u = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}$).

2) Der Gaußsche Satz gilt für *Normalbereiche*, d. h. endliche disjunkte Vereinigung von xyz-Normalbereichen.

11.3.4 Bezeichnungen der Vektoranalysis

Der *Nablaoperator*:

$$\nabla := \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$$

Es ist

$$\nabla u = (u_x, u_y, u_z) = \operatorname{grad} u$$

Der *Laplaceoperator*:

$$\Delta := \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right)$$

Formal gilt:

$$\Delta = \nabla \cdot \nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial z} \right)^2 (= \nabla^2)$$

Die *Divergenz* von f:

$$\operatorname{div} f = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial f_3}{\partial z} = \nabla \cdot f$$

Die *Rotation* von f:

$$\operatorname{rot} f = \left(\frac{\partial f_3}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial z}, \frac{\partial f_1}{\partial z} - \frac{\partial f_3}{\partial x}, \frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} \right)$$

Es ist

$$\operatorname{rot} f = \nabla \times f$$

11.3.5 Regeln

Sei u eine skalare Funktion, f ein Vektorfeld, definiert in $D \subseteq \mathbb{R}^3$. Dann ist

1. $\operatorname{rot}(uf) = u \operatorname{rot} f + (\nabla u) \times f$ für $u, f \in C^1$.
2. $\operatorname{rot} \operatorname{grad} u = 0$ für $u \in C^2$.
3. $\operatorname{div} \operatorname{rot} f = 0$ für $f \in C^2$.

11.3.6 Satz: Lemma von Poincaré

Im Lemma von Poincaré (9.5.6 auf Seite 249) wurde gezeigt:
Im Sterngebiet $D \subseteq \mathbb{R}^3$ besitzt ein C^1-Vektorfeld genau dann eine Stammfunktion, wenn $\operatorname{rot} f = 0$ ist.

11.3.7 Integralsatz von Stokes im $\mathbb{R}^3$

Es ist

$$\int_{\mathcal{F}} (\operatorname{rot} f) \cdot \nu \, do = \int_{\partial \mathcal{F}} P\,dx + Q\,dy + R\,dz.$$

Dabei ist:

1. $D \subseteq \mathbb{R}^2$ Gebiet, $\Phi \colon D \to \mathbb{R}^3$, zweimal stetig differenzierbar, injektiv, $\operatorname{rg} \Phi' = 2$
2. $B \subseteq D$, B Normalbereich
3. $\mathcal{F} = \Phi(B)$ Fläche
4. $\partial \mathcal{F} := \Phi(\partial B)$ Kurve im $\mathbb{R}^3$
5. $f = \begin{pmatrix} P \\ Q \\ R \end{pmatrix}$ ist C^1-Vektorfeld in einer offenen Menge $U \supset \mathcal{F} \cup \partial \mathcal{F}$.

Beweis: Sei ∂B parametrisiert nach der Bogenlänge:

$$\begin{aligned} u &= \varphi(s) \\ v &= \psi(s) \end{aligned} \qquad 0 \le s \le \text{Länge von } \partial B = L$$

Φ habe die Koordinaten X, Y und Z:

$$p(u,v) := P(\Phi(u,v)) = P(X(u,v), Y(u,v), Z(u,v))$$

Damit gilt für $\partial \mathcal{F}$:

$$\begin{aligned} x &= X(\varphi(s), \psi(s)) \\ y &= Y(\varphi(s), \psi(s)) \\ z &= Z(\varphi(s), \psi(s)) \end{aligned}$$

Daraus folgt dann:

$$\begin{aligned}
\int\limits_{\partial\mathcal{F}} P\,dx &= \int\limits_0^L p(\varphi(s),\psi(s))\cdot\left(\frac{d}{ds}X(\varphi(s),\psi(s))\right)\,ds \\
&= \int\limits_0^L p(X_u\cdot\varphi' + X_v\cdot\psi')\,ds = \int\limits_{\partial B} pX_u\,du + pX_v\,dv \\
&\overset{\odot}{=} \int\limits_B ((pX_v)_u - (pX_u)_v)\ d(u,v)
\end{aligned}$$

(mit $\odot$: Gauß im $\mathbb{R}^2$).
Nach dem Satz von H. A. Schwarz gilt:

$$(pX_v)_u - (pX_u)_v = p_uX_v - p_vX_u$$

Für den Gradienten von p gilt:

$$\begin{aligned}
p_u &= P_xX_u + P_yY_u + P_zZ_u \\
p_v &= P_xX_v + P_yY_v + P_zZ_v
\end{aligned}$$

Damit gilt dann:

$$\begin{aligned}
(pX_v)_u - (pX_u)_v &= p_uX_v - p_vX_u \\
&= P_yY_uX_v - P_yY_vX_u + P_zZ_uX_v - P_zZ_vX_u \\
&= P_y\begin{pmatrix} Y_u & X_u \\ Y_v & X_v \end{pmatrix} + P_z\begin{pmatrix} Z_u & X_u \\ Z_v & X_v \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Zusammen gilt dann für das Integral:

$$\begin{aligned}
\int\limits_{\partial\mathcal{F}} P\,dx &= \int\limits_B ((pX_v)_u - (pX_u)_v)\,d(u,v) \\
&= \int\limits_B P_y\begin{pmatrix} Y_u & X_u \\ Y_v & X_v \end{pmatrix} + P_z\begin{pmatrix} Z_u & X_u \\ Z_v & X_v \end{pmatrix}\ d(u,v) \\
&\overset{?}{=} \int\limits_{\mathcal{F}} (-P_y\nu_3 + P_z\nu_2)\,do
\end{aligned}$$

Gilt das „?“?
Sei

$$\nu = \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \\ \nu_3 \end{pmatrix} = \frac{\Phi_u\times\Phi_v}{\|\Phi_u\times\Phi_v\|}.$$

Damit ist dann

$$\begin{aligned}
\int\limits_{\mathcal{F}} (-P_y\cdot\nu_3 + P_z\cdot\nu_2)\,do &= \int\limits_B (-P_y\cdot\nu_3 + P_z\cdot\nu_2)\cdot\|\Phi_u\times\Phi_v\|\,d(u,v) \\
&= \int\limits_B (-P_y\cdot(\Phi_u\times\Phi_v)_3 + P_z(\Phi_u\times\Phi_v)_2)\,d(u,v)
\end{aligned}$$

Für $\Phi_u \times \Phi_v$ gilt:

$$\begin{aligned}
\Phi_u \times \Phi_v &= \begin{vmatrix} e^1 & X_u & X_v \\ e^2 & Y_u & Y_v \\ e^3 & Z_u & Z_v \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} Y_u & Y_v \\ Z_u & Z_v \end{vmatrix} e^1 \underbrace{- \begin{vmatrix} X_u & X_v \\ Z_u & Z_v \end{vmatrix}}_{\nu_2} e^2 + \underbrace{\begin{vmatrix} X_u & X_v \\ Y_u & Y_v \end{vmatrix}}_{\nu_3} e^3,
\end{aligned}$$

d. h.: Das „?“ gilt, wenn

$$\|\Phi_u \times \Phi_v\| \cdot (-\nu_3) = \begin{vmatrix} Y_u & X_u \\ Y_v & X_v \end{vmatrix}$$

und

$$\|\Phi_u \times \Phi_v\| \cdot \nu_2 = \begin{vmatrix} Z_u & X_u \\ Z_v & X_v \end{vmatrix}$$

Dies ist erfüllt. ✓
Zusammen gilt dann:

$$\begin{aligned}
\int_{\partial\mathcal{F}} P\,dx &= \int_{\mathcal{F}} (-P_y\nu_3 + P_z\nu_2)\,do \\
\int_{\partial\mathcal{F}} Q\,dy &= \int_{\mathcal{F}} (-Q_z\nu_1 + Q_x\nu_3)\,do \\
\int_{\partial\mathcal{F}} R\,dz &= \int_{\mathcal{F}} (-R_x\nu_2 + R_y\nu_1)\,do.
\end{aligned}$$

Addition liefert:

$$\begin{aligned}
\int_{\partial\mathcal{F}} P\,dx + Q\,dy + R\,dz &= \int_{\mathcal{F}} \nu_1(R_y - Q_z) + \nu_2(P_z - R_x) + \nu_3(Q_x - P_y)\,do \\
&= \int_{\mathcal{F}} \nu \cdot \operatorname{rot} f\,do
\end{aligned}$$

11.4 Differentialformen

In diesem Abschnitt gilt immer: $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen. Alle Funktionen $U \to \mathbb{R}$ sind wenigstens stetig, bzw. aus C^n.

11.4.1 Definition: multilinear, alternierend, p-Form

Eine stetige Funktion $\omega\colon U \times \underbrace{\mathbb{R}^n \times \cdots \times \mathbb{R}^n}_{p\text{-mal}}$ heißt p-Form ($0 \le p \le n$), wenn sie *multilinear* und *alternierend* ist.
Sei $\omega(x, h^1, h^2, \dots, h^p)$ mit $h^1, \dots, h^p \in \mathbb{R}^n$, $x \in U$.
Dann heißt multilinear:

$$\omega(x, \dots, \alpha h^i + \beta k^i, \dots, h^p) = \alpha \cdot \omega(x, \dots, h^i, \dots) + \beta \cdot (x, \dots, k^i, \dots)$$

und alternierend:

$$\omega(\dots h^i \dots h^j \dots) = -\omega(\dots h^j \dots h^i \dots) \text{ für } i \neq j$$

11.4.2 Beispiele

(a) $p = 0$: Dann ist $\omega \colon U \to \mathbb{R}$ stetige Funktion.

(b) $p = 1$:

$$\omega(x,h) = \omega\left(x, \sum_{\nu=1}^{n} h_\nu \cdot e^\nu\right) = \sum_{\nu=1}^{n} \omega(x, e^\nu) h_\nu$$

(Linearform)

(c) $p = 2$:

$$\omega(x,h,k) = \sum_{\nu=1}^{n} \omega(x, e^\nu, k) h_\nu = \sum_{\mu,\nu=1}^{n} \omega(x, e^\nu, e^\mu) h_\nu h_\mu$$

(quadratische Form)
$(\omega(x, e^\nu, e^\mu))_{\mu,\nu=1}^{n}$ ist schiefsymmetrisch:

$$\omega(x, e^\nu, e^\mu) = -\omega(x, e^\mu, e^\nu)$$

(d) $p = n$:

$$\omega(x, h^1, \dots, h^n) = a(x) \begin{vmatrix} h_1^1 & h_1^2 & \dots & h_1^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ h_n^1 & h_n^2 & \dots & h_n^n \end{vmatrix}$$

11.4.3 Grundformen

Für $i_1, \dots, i_p \in \{1, \dots, n\}$ heißt

$$\omega(h^1, \dots, h^p) := \begin{vmatrix} h_{i_1}^1 & \dots & h_{i_1}^p \\ h_{i_2}^1 & & h_{i_2}^p \\ \vdots & & \vdots \\ h_{i_p}^1 & \dots & h_{i_p}^p \end{vmatrix}$$

Grundform. Sie wird bezeichnet mit

$$dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \dots \wedge dx_{i_p}(h^1, \dots, h^p) = \omega(h^1, \dots, h^p)$$

11.4.4 Beispiel

(b) $p = 1$:

$$\omega(x,h) = \sum_{\nu=1}^{n} \underbrace{\omega(x, e^\nu)}_{a_\nu(x)} dx_\nu(h)$$

(c) $p = 2$:

$$\omega(x,h,k) = \sum_{\mu,\nu=1}^{n} \underbrace{\omega(x, e^\nu, e^\mu)}_{a_{\nu\mu}(x)} dx_\nu \wedge dx_\mu$$

(d) $p = n$:

$$\omega = a(x)\, dx_1 \wedge dx_2 \wedge \dots \wedge dx_n$$

11.4.5 Darstellungssatz

Jede p-Form läßt sich darstellen als

$$(*) \qquad \omega = \sum_{i_1,\dots,i_p} a_{i_1\dots i_p}(x)\, dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \cdots \wedge dx_{i_p} = \sum_{i_1<i_2<\cdots<i_p} b_{i_1\dots i_p}(x)\, dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_p}$$

Beweis: in 11.4.7

11.4.6 Beispiele im $\mathbb{R}^3$

Im $\mathbb{R}^3 \Rightarrow n = 3$.
$p = 1$:

$$a_1\, dx_1 + a_2\, dx_2 + a_3\, dx_3$$

$p = 2$:

$$\begin{aligned}\underbrace{a_{11}\, dx_1 \wedge dx_1}_{=0} &+ a_{12}\, dx_1 \wedge dx_2 + a_{13}\, dx_1 \wedge dx_3 \\ &+ a_{21}\, dx_2 \wedge dx_1 + \underbrace{a_{22}\, dx_2 \wedge dx_2}_{=0} + a_{23}\, dx_2 \wedge dx_3 \\ &+ a_{31}\, dx_3 \wedge dx_1 + a_{32}\, dx_3 \wedge dx_2 + \underbrace{a_{33}\, dx_3 \wedge dx_3}_{} = 0 \\ &= (a_{12} - a_{21})\, dx_1 \wedge dx_2 + (a_{13} - a_{31})\, dx_1 \wedge dx_3 + (a_{23} - a_{32})\, dx_2 \wedge dx_3\end{aligned}$$

$p = 3$:

$$a\, dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3$$

11.4.7 Beweis des Darstellungssatzes (11.4.5)

$$\begin{aligned}\omega(x, h^1, \dots, h^p) &= \omega\left(x, \sum_{i_1=1}^{n} h^1_{i_1} e^{i_1}, \dots, \sum_{i_p=1}^{n} h^p_{i_p} e^{i_p}\right) = \sum_{i_1=1}^{n} \omega\left(x, e^{i_1}, \dots, \sum_{i_p=1}^{n} h^p_{i_p} e^{i_p}\right) h^1_{i_1} \\ &= \sum_{i_1,\dots,i_p=1}^{n} \omega(x, e^{i_1}, e^{i_2}, \dots, e^{i_p}) h^1_{i_1} \dots h^p_{i_p} \\ &= \sum_{i_1,\dots,i_p=1}^{n} a_{i_1\dots i_p}(x)\, dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_p}(e^{i_1}, \dots, e^{i_p}) h^1_{i_1} \dots h^p_{i_p} \\ &= \sum_{i_1,\dots,i_p=1}^{n} a_{i_1\dots i_p}(x)\, dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_p}(h^1, \dots, h^p)\end{aligned}$$

ordnen:

$$= \sum_{i_1<i_2<\cdots<i_p} b_{i_1\dots i_p}\, dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_p}$$

11.4.8 Definition: Ableitung von p-Formen

Eine p-Form $(*)$ heißt k-mal stetig differenzierbar, wenn alle $a_{i_1 \ldots i_p} \in C^k(U)$ sind. Für $p = 0$, $\omega = a(x)$ heißt

$$d\omega := \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\partial a}{\partial x_\nu} \, dx_\nu$$

äußere Ableitung von ω,
und für $p \geq 1$,

$$\omega = a(x) \, dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_p}$$

ist

$$d\omega = \sum_{i_1,\ldots,i_p} (da_{i_1 \ldots i_p}) \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_p} = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\partial a}{\partial x_\nu}(x) \, dx_\nu \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_p}.$$

$d\omega$ ist eine $(p+1)$-Form.

11.4.9 Multiplikation von Formen

$$dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_p} \wedge (dx_{j_1} \wedge \cdots \wedge dx_{j_q}) := dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_p} \wedge dx_{j_1} \wedge \cdots \wedge dx_{j_q}$$

Damit ist auch für p-Form ω und q-Form σ $(d\omega) \wedge (d\sigma)$ erklärt.

11.4.10 Regeln zur Differenzierung von Formen

(1) Seien ω_1 und ω_2 p-Formen:

$$d(\omega_1 + \omega_2) = d\omega_1 + d\omega_2$$

(2) Sei a eine 0-Form und ω eine p-Form:

$$d(a\omega) = (da) \wedge \omega + a(d\omega)$$

(3) Sei ω_1 eine p-Form und ω_2 eine q-Form:

$$d(\omega_1 \wedge \omega_2) = (d\omega_1) \wedge \omega_2 + (-1)^p \omega_1 \wedge d(\omega_2)$$

Beweis: Aufgabe

11.4.11 Beispiele

(a) $p = 0$:

$$\omega(x) = a(x)$$
$$da(h) = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\partial a}{\partial x_\nu} dx_\nu(h) = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\partial a}{\partial x_\nu} h_\nu = (\operatorname{grad} a) \cdot h$$

(b) $a(x) = x_\nu$:

$$da = dx_\nu$$

(c)

$$\begin{aligned}\omega = \quad & a_1\, dx_2 \wedge \cdots \wedge dx_n \\ & - a_2\, dx_1 \wedge dx_3 \wedge \cdots \wedge dx_n + \cdots \\ & + (-1)^{n+1} a_n\, dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_{n-1}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}d\omega &= \sum_{\nu=1}^{n} \left(\frac{\partial a_1}{\partial x_\nu}\, dx_\nu \right) dx_2 \wedge \cdots \wedge dx_n - \cdots + \cdots \\ &= \frac{\partial a_1}{\partial x_1}\, dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n + \frac{\partial a_2}{\partial x_2}\, dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n + \cdots \\ &= \left(\frac{\partial a_1}{\partial x_1} + \cdots + \frac{\partial a_n}{\partial x_n} \right) dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n = (\operatorname{div} a) \cdot dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n\end{aligned}$$

mit $a = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$.

(d) $n = 3$:

$$\omega = a_1\, dx_1 + a_2\, dx_2 + a_3\, dx_3$$

$$\begin{aligned}d\omega = \quad & \underbrace{\frac{\partial a_1}{\partial x_1}\, dx_1 \wedge dx_1}_{=0} + \frac{\partial a_1}{\partial x_2}\, dx_2 \wedge dx_1 + \frac{\partial a_1}{\partial x_3}\, dx_3 \wedge dx_1 \\ & + \frac{\partial a_2}{\partial x_1}\, dx_1 \wedge dx_2 + \underbrace{\frac{\partial a_2}{\partial x_2}\, dx_2 \wedge dx_2}_{=0} + \frac{\partial a_2}{\partial x_3}\, dx_3 \wedge dx_2 \\ & + \frac{\partial a_3}{\partial x_1}\, dx_1 \wedge dx_3 + \frac{\partial a_3}{\partial x_2}\, dx_2 \wedge dx_3 + \underbrace{\frac{\partial a_3}{\partial x_2}\, dx_3 \wedge dx_3}_{=0} \\ = \quad & \left(\frac{\partial a_3}{\partial x_2} - \frac{\partial a_2}{\partial x_3} \right) dx_2 \wedge dx_3 \\ & + \left(\frac{\partial a_1}{\partial x_3} - \frac{\partial a_3}{\partial x_1} \right) dx_3 \wedge dx_1 \\ & + \left(\frac{\partial a_2}{\partial x_1} - \frac{\partial a_1}{\partial x_2} \right) dx_1 \wedge dx_2 \\ \overset{\text{formal}}{=} & (\operatorname{rot} a) \cdot (dx_2 \wedge dx_3,\, dx_3 \wedge dx_1,\, dx_1 \wedge dx_2)\end{aligned}$$

11.4.12 Satz

Für jede C^2-Form ω gilt:

$$d(d\omega) = 0$$

Beweis: In zwei Abschnitten:

1.) für $p = 0$,

2.) für $p \geq 1$.

zu 1.) Sei $p = 0$, $\omega = a(x)$:

$$\begin{aligned} d(da) &= d\left(\sum_{\nu=1}^{n} \frac{\partial a}{\partial x_\nu}\, dx_\nu\right) = \sum_{\mu=1}^{n}\sum_{\nu=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_\mu}\left(\frac{\partial a}{\partial x_\nu}\right) dx_\mu \wedge dx_\nu \\ &= \sum_{1\le\mu\le\nu\le n} \underbrace{\left(\frac{\partial^2 a}{\partial x_\mu \partial x_\nu} - \frac{\partial^2 a}{\partial x_\nu \partial x_\mu}\right)}_{=0 \text{ (H. A. Schwarz)}} dx_\mu \wedge dx_\nu \\ &= 0 \end{aligned}$$

zu 2.)

$$\omega = a(x)\, dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_p = a\sigma$$

$$d\omega \overset{(2)}{=} (da) \wedge \sigma + a\,\underbrace{(d\sigma)}_{=0}$$

$$d(d\omega) \overset{(3)}{=} d(da) \wedge \sigma + (-1)^1\, da \wedge \underbrace{(d\sigma)}_{=0} = d(da) = 0,$$

denn es gilt

$$d\sigma = d(x_1 \wedge \cdots \wedge dx_p) = (d_1) \wedge dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_p = 0$$

11.4.13 Bemerkungen

(a) $d(da) = 0 \iff$ Satz von Schwarz.

(b) Sei u eine C^1-Funktion, $n = 3$:

$$\omega = \frac{\partial u}{\partial x_1}\, dx_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2}\, dx_2 + \frac{\partial u}{\partial x_3}\, dx_3 = du$$

$$d\omega = d(du) = 0 \iff \operatorname{rot}(\operatorname{grad} u) = 0$$

(c)

$$\begin{aligned} \omega &= a_1\, dx_1 + a_2\, dx_2 + a_3\, dx_3 \\ d\omega &= (\operatorname{rot} a) \cdot (dx_2 \wedge dx_3,\ dx_3 \wedge dx_1,\ dx_1 \wedge dx_2) \\ 0 = d(d\omega) &= (\operatorname{div}(\operatorname{rot} a))\, dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 \\ &\Rightarrow \operatorname{div} \operatorname{rot} a = 0 \end{aligned}$$

11.4.14 Definition: Stammform, geschlossen

(a) Eine p-Form ω heißt *exakt*, wenn es eine $(p-1)$-Form α gibt mit $d\alpha = \omega$. α heißt dann *Stammform*.

(b) Eine stetig differenzierbare p-Form ω heißt *geschlossen*, wenn $d\omega = 0$ ist.

11.4.15 Beispiele/Bemerkungen

(1) Ist ω exakt und C^1, so ist ω geschlossen.
Beweis:

$$\omega = d\alpha \implies d\omega = d(d\alpha) = 0$$

(2) Sei ω geschlossene 1-Form, U ein Sterngebiet und $\omega \in C^1$. Dann ist ω exakt.
Beweis: Sei

$$\omega = a_1\,dx_1 + a_2\,dx_2 + \cdots + a_n\,dx_n$$

mit $a_1, \ldots, a_n \in C^1(U)$.
ω geschlossen:

$$\Rightarrow d\omega = 0 = \sum_{1 \le \mu \le \nu \le n} \left(\frac{\partial a_\mu}{\partial x_\nu} - \frac{\partial a_\nu}{\partial x_\mu} \right) dx_\mu \wedge dx_\nu$$

also

$$\frac{\partial a_\mu}{\partial x_\nu} = \frac{\partial a_\nu}{\partial x_\mu}$$

Daraus folgt (Analysis II):

$$(a_1, \ldots, a_n) = \operatorname{grad}(u)$$

mit $u \in C^2(U)$.
U: Nullform:

$$du = \sum_{\nu=1}^{n} \underbrace{\partial u}_{a_\nu}\, dx_\nu = \omega$$

(3)

$$\omega = \frac{-y}{x^2+y^2}\,dx + \frac{x}{x^2+y^2}\,dy$$

ist geschlossen (Aufgabe).
ω ist in $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ nicht exakt, sonst wäre

$$2\pi = \int_C \frac{-y}{x^2+y^2}\,dx + \frac{x}{x^2+y^2}\,dy = 0$$

für jede geschlossene Kurve $C \subseteq \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

(4) Wenn ω nicht geschlossen ist, aber $M(x)\omega$ geschlossen ist, dann heißt M integrierender Faktor.
$p = 1$**:** Sei

$$\omega = a_1\,dx_1 + \cdots + a_n\,dx_n$$
$$M\omega = Ma_1\,dx_1 + \cdots + Ma_n\,dx_n$$

Sei nun $M\omega$ geschlossen:

$$\iff \frac{\partial(Ma_\mu)}{\partial x_\nu} = \frac{\partial(Ma_\nu)}{\partial x_\mu}$$
$$\iff X_{x_\nu} a_\mu + M\frac{\partial a_\mu}{\partial x_\nu} = M_{x_\mu} a_\nu + M\frac{\partial a_\nu}{\partial x_\mu}$$

für $\mu, \nu = 1, \dots, n$, $\mu < \nu$.
Dies ist ein *System partieller Differentialgleichungen 1. Ordnung.*
$n = 2$**:** Sei $\omega = a\,dx + b\,dy$:

$$\begin{aligned} M\omega \text{ ist geschlossen } &\iff (Ma)_y = (Mb)_x \\ &\iff M_y a + M a_y = M_x b + M b_x \\ &\iff a M_y - b M_x = (b_x - a_y) M \qquad (*) \end{aligned}$$

mit $M = M(x, y)$.
konkret: Sei

$$\omega = \underbrace{(2 + xy)e^{xy}}_{=:a}\,dx + \underbrace{x^2 e^{xy}}_{=:b}\,dy$$

Dann ist

$$\begin{aligned} a_y &= x e^{xy} + (2 + xy) x e^{xy} = 3x e^{xy} + x^2 y e^{xy} \\ b_x &= 2x e^{xy} + x^2 y e^{xy} \end{aligned}$$

Es ist also $a_y \neq b_x$. Gesucht ist nun ein integrierender Faktor $M = M(x, y)$. Aus $(*)$ folgt die Bedingung für M:

$$(2 + xy)e^{xy} M_y - x^2 e^{xy} M_x \stackrel{!}{=} -x e^{xy} M$$

Ansatz: Der Multiplikator M ist hier von x abhängig:

$$M_x = \frac{1}{x} M$$

Eine Lösung ist $M = x$:

$$x\omega = (2x + y^2 y)e^{xy}\,dx + x^3 e^{xy}\,dy = d(x^2 e^{xy})$$

ist exakt, also auch geschlossen.

11.4.16 Definition

Sei $p \geq 1$ und

$$\sigma_{i_1 i_2 \dots i_p} := \sum_{\nu=1}^{p} (-1)^{\nu-1} x_{i_\nu} dx_{i_1} \wedge \dots \wedge \widetilde{dx_{i_\nu}} \wedge \dots \wedge dx_{i_p}$$

($\widetilde{dx_{i_\nu}}$ bedeutet: dx_{i_ν} ist auszulassen). $\sigma_{i_1 i_2 \dots i_p}$ ist eine $(p-1)$-Form. Ist

$$\omega = \sum_{i_1 \dots i_p} a_{i_1 \dots i_p}(x)\,dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_p}$$

mit Koeffizienten $a_{i_1 \dots i_p}$ im Sterngebiet U bzgl. 0 definiert, dann setzt man

$$I\omega := \sum_{i_1 \dots i_p} \left[\int_0^1 t^{p-1} a_{i_1 \dots i_p}(tx)\,dt \right] \cdot \sigma_{i_1 \dots i_p}.$$

11.4.17 Bemerkung

Ist ω geschlossen, dann ist $I\omega$ eine Stammform.

Beweis:

$$\alpha = I\omega$$
$$d\alpha = \omega - I(\underbrace{d\omega}_{=0}) = \omega$$

11.4.18 Hilfssatz

Sei ω eine p-Form, stetig differenzierbar im sternförmigen Gebiet $U \subseteq \mathbb{R}^n$. Dann gilt

$$I(d\omega) + d(I\omega) = \omega.$$

Beweis: Hier OBdA für $\omega = a(x)\, dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_p$.
Für dieses ω ist

$$d\omega = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\partial a}{\partial x_\nu}\, dx_\nu \wedge dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_p$$

eine $(p+1)$-Form.
Es ist

$$I(d\omega) = \sum_{\nu=1}^{n} \left[\int_0^1 t^{((p+1)-1)} \frac{\partial a}{\partial x_\nu}(xt)\, dt \right] \sigma_{\nu,1,2,\ldots,p}$$

$$I\omega = \left[\int_0^1 t^{p-1} a(tx)\, dt \right] \sigma_{1,2,\ldots,p}$$

und

$$d(I\omega) = \sum_{\nu=1}^{n} \left[\int_0^1 t^{p-1} \cdot t \frac{\partial a}{\partial x_\nu}(tx)\, dt \right] dx_\nu \wedge \sigma_{1,\ldots,p} + \left[\int_0^1 t^{p-1} a(tx)\, dt \right] d\sigma_{1,\ldots,p}$$

Die weitere Berechnung von $d(I\omega)$ wird nun aufgeteilt:

(a)

$$d\sigma_{1,\ldots,p} = \sum_{\nu=1}^{p} \sum_{\mu=1}^{n} (-1)^{\nu-1} \underbrace{\frac{\partial x_\nu}{\partial x_\mu}}_{\substack{=0 \text{ für } \mu \neq \nu \\ =1 \text{ für } \mu = \nu}} dx_\mu \wedge dx_1 \wedge \cdots \wedge \widetilde{dx_\nu} \wedge \cdots \wedge dx_p$$

$$= \sum_{\nu=1}^{p} (-1)^{\nu-1}\, dx_\nu \wedge dx_1 \wedge \cdots \wedge \widetilde{dx_\nu} \wedge \cdots \wedge dx_p$$

$$= \sum_{\nu=1}^{p} dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_p = p\, dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_p$$

(b) Es ist

$$dx_\nu \wedge \sigma_{1,\ldots,p} = \sum_{\mu=1}^{p} (-1)^{\mu-1} x_\mu\, dx_\nu \wedge dx_1 \cdots \wedge \widetilde{dx_\mu} \wedge \cdots \wedge dx_p.$$

(i) Für $1 \le \nu \le p$ gilt dann:

$$dx_\nu \wedge \sigma_{1,\ldots,p} = x_\nu\, dx_1 \wedge \ldots dx_p - \underbrace{\sigma_{\nu,1,2,\ldots,p}}_{=0}$$

(ii) Und für $p < \nu \leq n$ gilt:

$$\begin{aligned} dx_\nu \wedge \sigma_{1,\dots,p} = &- \left[\sum_{\mu=1}^{p} (-1)^\mu x_\mu \, dx_\nu \wedge dx_1 \wedge \dots \wedge \widetilde{dx_\mu} \wedge \dots \wedge dx_p \right. \\ &\left. + (-1)^0 x_\nu \, \widetilde{dx_\nu} \wedge dx_1 \wedge \dots \wedge dx_p - x_\nu \widetilde{dx_\nu} \wedge dx_1 \wedge \dots \wedge dx_p \right] \\ = &- \sigma_{\nu,1,2,\dots,p} + x_\nu dx_1 \wedge \dots \wedge dx_p \end{aligned}$$

Nach (i) und (ii) gilt also immer:

$$dx_\nu \wedge \sigma_{1,2,\dots,p} = x_\nu \, dx_1 \wedge \dots \wedge dx_p - \sigma_{\nu,1,2,\dots,p}$$

Aus (a) und (b) folgt dann:

$$\begin{aligned} I(d\omega) + d(I\omega) &= \sum_{\nu=1}^{n} \left[\int_0^1 t^p \frac{\partial a}{\partial x_\nu}(tx) \, dt \right] x_\nu \, dx_1 \wedge \dots \wedge dx_p + \left[\int_0^1 t^{p-1} a(tx) \, dt \right] \cdot p \, dx_1 \wedge \dots \wedge dx_p \\ &= \left\{ \int_0^1 \underbrace{\left[\sum_{\nu=1}^{n} \left(t^p \frac{\partial a}{\partial x_\nu}(tx) x_\nu \right) + p t^{p-1} a(tx) \right] dt}_{\overset{!}{=} \frac{d}{dt}(t^p a(tx))} \right\} dx_1 \wedge \dots \wedge dx_p \\ &= \underbrace{t^p a(tx) \Big|_0^1}_{=a(x)} dx_1 \wedge \dots \wedge dx_p = \omega \end{aligned}$$

11.4.19 Lemma von Poincaré

Ist ω eine stetig differenzierbare und geschlossene p-Form in einem sternförmigen Gebiet U, so ist sie exakt, d. h. es gibt eine Stammform α. Alle Stammformen sind gegeben durch

$$\alpha = I\omega + d\eta,$$

wobei η eine beliebige zweimal stetig differenzierbare $(p-2)$-Form ist (im Fall $p = 1$ ist $d\eta$ durch eine Konstante zu ersetzen).

Beweis: Zeige, daß $\alpha = I\omega$ eine Stammform ist:

$$d\alpha = d(I\omega) = \omega - I(d\omega) = \omega$$

($d\omega = 0$, da ω nach Voraussetzung geschlossen ist.)
Seien nun α und α_1 Stammformen:

$$d(\alpha_1 - \alpha) = d\alpha_1 - d\alpha = \omega - \omega = 0$$

Das heißt, daß $\alpha_1 - \alpha$ geschlossen ist. Also hat $\alpha_1 - \alpha$ eine Stammform η, d. h. $\alpha_1 - \alpha = d\eta$. Daraus folgt: $\alpha_1 = \alpha + d\eta$, wobei η zweimal stetig differenzierbar ist.

Analysis II , Kapitel 9.5.6: Dort ist $p = 1$, $\omega = a_1(x)\,dx_1 + \cdots + a_n(x)\,dx_n$.
Sei $u \in C^1(U)$ Stammform von ω. Dann ist

$$du = \frac{\partial u}{\partial x_1}\,dx_1 + \cdots + \frac{\partial u}{\partial x_n}\,dx_n$$

d. h. $\operatorname{grad} u = a = (a_1, \ldots, a_n)$

$$\omega \text{ ist geschlossen} \iff \frac{\partial a_i}{\partial x_j} = \frac{\partial a_j}{\partial x_i}$$

11.4.20 Beispiel

Sei $n = 3$ und $p = 2$. Gegeben sei ein C^1-Vektorfeld $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ in U (U sei sternförmig bzgl. 0).

Gesucht ist ein Vektorfeld $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$ in $C^2(U)$ mit $\operatorname{rot} v = b$.

$$\omega = b_1\,dx_2 \wedge dx_3 + b_2\,dx_3 \wedge dx_1 + b_3\,dx_1 \wedge dx_2$$

ω geschlossen $\iff$ $\operatorname{div} b = 0$.
Damit ex. Stammform α von ω:

$$\alpha = v_1\,dx_1 + v_2\,dx_2 + v_3\,dx_3$$

Für die Stammfunktion α von ω gilt in dieser Schreibweise, daß $\operatorname{rot} v = b$ ist (früher mal gemacht).
Für $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ gilt dann:

$$\begin{aligned}
v_1(x) &= x_3 \int_0^1 t b_2(tx)\,dt - x_2 \int_0^1 t b_3(tx)\,dt + u_{x_1}(x) \\
v_2(x) &= x_1 \int_0^1 t b_3(tx)\,dt - x_3 \int_0^1 t b_1(tx)\,dt + u_{x_2}(x) \\
v_3(x) &= x_2 \int_0^1 t b_1(tx)\,dt - x_1 \int_0^1 t b_2(tx)\,dt + u_{x_3}(x)
\end{aligned}$$

11.4.21 Zurückholen von Differentialformen

Sei

$$\omega = \sum_{i_1,\ldots,i_p} a_{i_1 i_2 \ldots i_p}(x)\,dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_p} \qquad (*)$$

eine p-Form in $D \subseteq \mathbb{R}^n$ und $\Phi\colon G \to D$ stetig differenzierbar in $G \subseteq \mathbb{R}^m$. Dann erhält man die p-Form $\Phi^*\omega$ dadurch, indem man in $(*)$ dx_j ersetzt durch

$$\sum_{i=1}^{m} \frac{\partial \Phi_j}{\partial u_i}\,du_i$$

und x ersetzt durch $\Phi(u)$.

11.4.22 Beispiel

Für $n = 3$, $m = 2$, $p = 2$: Sei
$$\omega = b_1\, dx_2 \wedge dx_3 + b_2\, dx_3 \wedge dx_1$$
und
$$\Phi(u) = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_1 - u_2 \end{pmatrix}$$
mit $D = \mathbb{R}^3$, $G = \mathbb{R}^2$.
Dann ist

$$\begin{aligned} \Phi^*\omega =& b_1(u_1, u_2, u_1 - u_2) \cdot [du_2 \wedge (du_1 - du_2)] \\ &+ b_2(u_1, u_2, u_1 - u_2) \cdot [(du_1 - du_2) \wedge du_1] \\ =& (-b_1(u_1, u_2, u_1 - u_2) + b_2(u_1, u_2, u_1 - u_2))\, du_1 \wedge du_2 \end{aligned}$$

11.4.23 Regeln

(a) Für die p-Formen ω_1 und ω_2 gilt:

$$\Phi^*(\omega_1 + \omega_2) = \Phi^*\omega_1 + \Phi^*\omega_2$$

(b) Für die 0-Form a und die p-Form ω gilt:

$$\Phi^*(a\omega) = (\Phi^* a)(\Phi^*\omega)$$

(c) Für die p-Form ω_1 und die q-Form ω_2 gilt:

$$\Phi^*(\omega_1 \wedge \omega_2) = (\Phi^*\omega_1) \wedge (\Phi^*\omega_2)$$

Beweis: Aufgabe

11.4.24 Satz

Ist Φ zweimal stetig differenzierbar, so gilt:

$$d(\Phi^*\omega) = \Phi^*(d\omega)$$

Beweis:

(1) Sei $\omega = a$ Nullform. Dann ist
$$d\omega = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial a(x)}{\partial x_j}\, dx_j.$$

Daraus folgt:
$$\Phi^*(d\omega) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial a}{\partial x_j}(\Phi(u)) \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial \Phi_j}{\partial u_i}\, du_i$$

Ausserdem ist
$$\Phi^*\omega = a(\Phi(u)).$$

Und damit ist

$$\begin{aligned} d(\Phi^*\omega) &= \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial}{\partial u_i} a(\Phi(u))\, du_i \overset{\otimes}{=} \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial a}{\partial x_j}(\Phi(u)) \frac{\partial \Phi_j}{\partial u_i}\, du_i \\ &= \Phi^*(d\omega) \end{aligned}$$

Dabei wurde bei $\otimes$ die Kettenregel angewandt.

(2) Sei nun $\omega = dx_1$ (Der Beweis geht für $\omega = dx_j$ genauso).
Es ist

$$d\omega = d(dx_1) = 0$$

und damit

$$\Phi^*(d\omega) = 0.$$

Andererseits ist

$$\Phi^*\omega = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial \Phi}{\partial u_i}\, du_i$$

und damit

$$d(\Phi^*\omega) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial u_j \partial u_i}\, du_j \wedge du_i \overset{\oplus}{=} -\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial u_i \partial u_j}\, du_i \wedge du_j$$

mit dem Satz von Schwarz und Vertauschung von du_i und du_j bei $\oplus$.
Also: $d(\Phi^*\omega) = 0$.

(3) Sei $\omega = dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_p$. ($\omega = dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_p}$ genauso)
Es ist

$$d\omega = 0 \qquad \Phi^*(d\omega) = 0$$

und

$$\Phi^*\omega = (\Phi^* dx_1) \wedge \cdots \wedge (\Phi^* dx_p).$$

Damit ist also

$$\begin{aligned} d(\Phi^*\omega) &= \sum_{j=1}^{p} (-1)^{j-1} (\Phi^* dx_1) \wedge \cdots \wedge \underbrace{d(\Phi^* dx_j)}_{=0 \text{ nach } (2)} \wedge \cdots \wedge (\Phi^* dx_p) \\ &= 0 \end{aligned}$$

(4) Sei $\omega = a(x)\, dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_p$ ($\omega = a(x)\, dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_p}$ genauso).
Setze dabei $\sigma := dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_p$.

$$\begin{aligned} d(\Phi^*\omega) &\overset{(b)}{=} d((\Phi^* a)(\Phi^*\sigma)) = d(\Phi^* a) \wedge (\Phi^*\sigma) + (\Phi^* a)\, \underbrace{d(\Phi^*\sigma)}_{0 \text{ nach } (3)} \\ &\overset{(1)}{=} \Phi^*(da) \wedge (\Phi^*\sigma) \\ &\overset{(c)}{=} \Phi^*(da \wedge \sigma) = \Phi^*(d(a\sigma)) = \Phi^*(d\omega) \end{aligned}$$

(5) Sei nun

$$\omega = \sum_{i_1 \dots i_p} a_{i_1 \dots i_p}(x) \sigma_{i_1 \dots i_p} = \sum \omega_{i_1 \dots i_p}$$

mit

$$\sigma_{i_1 \dots i_p} = dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_p}.$$

Dann ist

$$\begin{aligned} d(\Phi^* \omega) &= d\left(\sum \Phi^* \omega_{i_1 \dots i_p}\right) = \sum d(\Phi^* \omega_{i_1 \dots i_p}) \\ &= \sum \Phi^*(d\omega_{i_1 \dots i_p}) = \Phi^*(d\omega). \end{aligned}$$

11.5 Flächen und Mannigfaltigkeiten

11.5.1 Definition: p-Flächenstück

Eine Abbildung $\Phi \colon D \to \mathbb{R}^n$ heißt Parameterdarstellung eines p-Flächenstückes $\mathcal{F}$, $(1 \le p \le n)$, wenn gilt:

(1) $D \subseteq \mathbb{R}^p$ ist ein konvexes Gebiet. (d. h. mit $a, b \in D$ ist auch $\{a + t(b - a) \colon 0 \le t \le 1\} \subseteq D$).

(2) Φ ist injektiv, $\mathcal{F} = \Phi(D)$, $\Phi^{-1} \colon \mathcal{F} \to D$ ist stetig.

(3) Φ ist stetig differenzierbar, $\operatorname{rg} \Phi' = p$ in D (Φ' ist $n \times p$-Matrix).

11.5.2 Beispiel

für $n = 3$, $p = 2$: Sei

$$D = \{(u, v) \colon u^2 + v^2 < 1\} \subseteq \mathbb{R}^2$$

und

$$\Phi(u, v) = \frac{1}{u^2 + v^2 + 1} \begin{pmatrix} 2u \\ 2v \\ 1 - u^2 - v^2 \end{pmatrix}$$

Prüfe nach, daß

$$\mathcal{F} = \left\{(x_1, x_2, x_3) : x_1^1 + x_2^2 + x_3^2 = 1,\ x_3 > 0\right\}$$

die Fläche der oberen Halbkugel ist.
Φ^{-1} ist stetig (einfach nachrechnen):

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{2}{1 + u^2 + v^2} u & x_2 &= \frac{2}{1 + u^2 + v^2} v \\ u &= \varrho x_1 & v &= \varrho x_2 \end{aligned}$$

Aus

$$x_3 = \frac{1 - \varrho^2(x_1^2 + x_2^2)}{1 + \varrho^2(x_1^2 + x_2^2)}$$

folgt:

$$\begin{gathered} \varrho^2(1 + x_3)(x_1^2 + x_2^2) = 1 - x_3 \\ x_1^2 + x_2^2 = 1 - x_3^2 = (1 - x_3)(1 + x_3) \\ \varrho^2(1 + x_3)^2 = 1 \qquad \varrho = \frac{1}{1 + x_3} \\ \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \frac{1}{1 + x_3} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \end{gathered}$$

ist stetig.

11.5.3 Definition: Verträglichkeit von Flächenstücken

Zwei p-Flächenstücke $\mathcal{F}_1$, $\mathcal{F}_2$ heißen *verträglich*, wenn es zu jedem $x \in \mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2$ ein p-Flächenstück $\mathcal{F}_3$ gibt mit $x \in \mathcal{F}_3 \subseteq \mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2$.

11.5.4 Bemerkungen

(a) Gilt $\mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2 = \emptyset$, dann sind $\mathcal{F}_1$ und $\mathcal{F}_2$ verträglich.

(b) Sind $\mathcal{F}_1$ und $\mathcal{F}_2$ verträglich, $x_0 \in \mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2$, $x_0 = \Phi(u_0) = \Psi(s_0)$, dann ist

$$h := \Psi^{-1} \circ \Phi$$

in einer Umgebung von u_0 erklärt und stetig differenzierbar.
Dasselbe gilt für

$$h^{-1} = \Phi^{-1} \circ \Psi$$

genauso, d.h. h ist ein Diffeomorphismus, $\Phi = \Psi \circ h$ und $\Psi = \Phi \circ h^{-1}$.

(c) Sind Φ, Ψ Parameterdarstellungen von $\mathcal{F}$, so gilt $\Phi = \Psi \circ h$ mit einem Diffeomorphismus $h\colon D \to G$.

Beweis für (b):
Da $\operatorname{rg} \Phi'(s_0) = p$ ist, existieren $1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_p \leq n$ mit:
Für

$$\overline{\Psi} := \begin{pmatrix} \Psi_{i_1} \\ \vdots \\ \Psi_{i_p} \end{pmatrix}$$

ist $\det \overline{\Psi}'(s_0) \neq 0$.
$\overline{\Psi}$ hat eine Umkehrfunktion in einer Umgebung von $\overline{\Psi}(s_0)$,
$\overline{\Psi}$ und $\overline{\Psi}^{-1}$ sind stetig differenzierbar.
Setze in einer Umgebung von u_0

$$h := \Psi^{-1} \circ \Phi = \underbrace{\overline{\Psi}^{-1} \circ \overline{\Psi}}_{\in C^1}$$

mit $\overline{\Phi} = \begin{pmatrix} \Phi_{i_1} \\ \vdots \\ \Psi_{i_p} \end{pmatrix}$.
Für h^{-1} wird genauso verfahren.

11.5.5 Definition: Tangentialraum

Sei $\mathcal{F}$ ein p-Flächenstück mit Parameterdarstellung $\Phi\colon D \to \mathcal{F}$, $x \in \mathcal{F}$ und $x = \Phi(u)$.
Dann heißt der von $\Phi_{u_1}, \Phi_{u_2}, \ldots, \Phi_{u_p}$ aufgespannte Vektorraum *Tangentialraum* im Punkt x. Geschrieben: $T_x\mathcal{F}$.
Es ist $T_x\mathcal{F} \subseteq \mathbb{R}^n$, $\dim T_x\mathcal{F} = p$.
Für $n = 3$ und $p = 2$ ist $T_x\mathcal{F}$ die in den Nullpunkt verschobene Tangentialebene.

11.5.6 Bemerkungen

(a) Sind $\mathcal{F}_1$ und $\mathcal{F}_2$ verträglich und ist $x \in \mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2$, so ist $T_x\mathcal{F}_1 = T_x\mathcal{F}_2$.

(b) $T_x\mathcal{F}$ hängt nicht von der Parameterdarstellung ab.

Beweis

(a) Seien Φ, Ψ Parameterdarstellungen von $\mathcal{F}_1$ und $\mathcal{F}_2$.
Dann ist lokal $\Phi = \Psi \circ h$, $\det h' \neq 0$. Damit ist

$$\Phi' = (\Psi' \circ h) \cdot h'$$

Φ_{u_i} ist Linearkombination von $\Psi_{s_1}, \ldots, \Psi_{s_p}$.
Ψ_{s_i} ist Linearkombination von $\Phi_{u_1}, \ldots, \Phi_{u_p}$.

(b) entspricht (a) mit $\mathcal{F}_1 = \mathcal{F}_2$.

11.5.7 Definition: gleichorientierte Flächenstücke

Zwei verträgliche Flächenstücke heißen *gleichorientiert*, wenn in $\Phi = \Psi \circ h$ (lokal) $\det h' > 0$ ist. Andernfalls heißen sie *entgegengesetzt-orientiert*.

11.5.8 Definition

Sei $\mathcal{F}$ ein p-Flächenstück, $\mathcal{F} \subseteq U$, $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, ω eine p-Form in U. Dann definiert man

$$\int\limits_{\mathcal{F}} \omega := \int\limits_{D} \omega\left(\Phi(u), \Phi_{u_1}(u), \ldots, \Phi_{u_p}(u)\right)\, du,$$

falls die rechte Seite als Lebesgue-Integral existiert.

11.5.9 Beispiele

(a) Für $p = 1$, $n \geq 2$:
Sei $\mathcal{F}$ definiert durch $\Phi\colon (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}^n$, Kurve im $\mathbb{R}^n$ und

$$\omega = a_1(x)\, dx_1 + \cdots + a_n(x)\, dx_n$$

Dann ist

$$\begin{aligned} \int\limits_{\mathcal{F}} \omega &= \int\limits_{\alpha}^{\beta} \left(a_1(\Phi(u))\Phi_1'(u) + \cdots + a_n(\Phi(u))\Phi_n'(u)\right)\, du \\ &= \int\limits_{\mathcal{F}} a_1\, dx_1 + \cdots + a_n\, dx_n \qquad \text{„Kurvenintegral“} \end{aligned}$$

(b) Für $n = 3$, $p = 2$:

Sei $\mathcal{F}$ definiert durch $\Phi\colon D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$, und

$$\omega = b_1(x)\, dx_2 \wedge dx_3 + b_2(x)\, dx_3 \wedge dx_1 + b_3(x)\, dx_1 \wedge dx_2.$$

Dann ist

$$\begin{aligned}
\int\limits_{\mathcal{F}} &= \int\limits_{D} \left[b_1(\Phi(u)) \begin{vmatrix} \dfrac{\partial \Phi_2}{\partial u_1} & \dfrac{\partial \Phi_2}{\partial u_2} \\ \dfrac{\partial \Phi_3}{\partial u_1} & \dfrac{\partial \Phi_3}{\partial u_2} \end{vmatrix} + \cdots \right] du \\
&= \int\limits_{D} b(\Phi(u)) \cdot (\Phi_{u_1}(u) \times \Phi_{u_2}(u))\; du \\
&= \int\limits_{D} b(\Phi(u)) \cdot \underbrace{\frac{\Phi_{u_1} \times \Phi_{u_2}}{\|\Phi_{u_1} \times \Phi_{u_2}\|}}_{\substack{\text{Normalenvektor} \\ \nu(x),\, x=\Phi(u)}} \|\Phi_{u_1} \times \Phi_{u_2}\|\, du \\
&= \int\limits_{D} b(x) \cdot \nu(x)\, do
\end{aligned}$$

11.5.10 Satz

Die Definition von $\int\limits_{\mathcal{F}} \omega$ ist unabhängig von der gewählten Parameterdarstellung, d.h.:
Sind $\Phi\colon D \to \mathcal{F}$ und $\Psi\colon G \to \mathcal{F}$ zwei Parameterdarstellungen von $\mathcal{F}$ und ist $\Phi = \Psi \circ h$ mit einem Diffeomorphismus $h\colon D \to G$ mit $\det h' > 0$, so gilt:

$$\int\limits_{D} \underbrace{\omega\left(\Phi(u), \Phi_{u_1}, \ldots, \Phi_{u_p}\right)}_{=:f(u)} du = \int\limits_{g} \underbrace{\omega\left(\Psi(s), \Psi_{s_1}, \ldots, \Psi_{s_p}\right)}_{=:g(s)} ds$$

Beweis

$$\begin{aligned}
\int\limits_{G} g(s)\, ds &= \int\limits_{D} g(h(u)) \cdot |\det h'(u)|\, du \\
&= \int\limits_{D} \underbrace{g(h(u)) \cdot \underbrace{\det h'(u)}_{>0}}_{f(u)} du = \int\limits_{D} f(u)\, du
\end{aligned}$$

11.5.11 Bemerkung

Die p-Form $\Phi^*\omega$ ist definiert in $D \subseteq \mathbb{R}^p$, also von der Form

$$f(u)\, du_1 \wedge \cdots \wedge du_p.$$

D ist eine p-Fläche in $\mathbb{R}^p$ mit der Parameterdarstellung $\mathrm{id}\colon D \to D$ (Identität)

$$\int\limits_{D} \Phi^*\omega = \int\limits_{D} f(u)\, du$$

also

$$\int\limits_{D} f(u)\, du_1 \wedge \cdots \wedge du_p = \int\limits_{D} f(u)\, du$$

11.5.12 Definition: Flächenstück mit Rand

Sei $\Phi\colon D \to \mathbb{R}^n$ die Parameterdarstellung eines p-Flächenstückes und sei

$$H = \{u \in \mathbb{R}^p \colon u_1 < \alpha\}$$

ein Halbraum mit $D \cap H \neq \emptyset$, $D \not\subseteq H$.
Dann heißt $\mathcal{F}$ mit der Parameterdarstellung $\Phi\Big|_{D\cap H}$ *p-Flächenstück mit Rand.*
$\partial\mathcal{F} = \Phi(D \cap \partial H)$, $\partial H = \{u\colon u_1 = \alpha\}$
$\overline{\mathcal{F}} := \mathcal{F} \cup \partial\mathcal{F}$ heißt *Flächenstück mit Rand.*
Beachte: $\partial\mathcal{F}$ ist *nicht* der topologische Rand, und $\overline{\mathcal{F}}$ ist *nicht unbedingt* der topologische Abschluß.

11.5.13 Bemerkung

Das Urbild von $\partial\mathcal{F}$ in D,

$$\triangle = \{(u_2, \ldots, u_p)\colon (\alpha, u_2, \ldots, u_p) \in D\}$$

ist ein *konvexes Gebiet* im $\mathbb{R}^{p-1}$.

$$(u_2, \ldots, u_p) \longmapsto \Phi(\alpha, u_2, \ldots, u_p)$$

ist eine Parameterdarstellung von $\partial\mathcal{F}$. $\partial\mathcal{F}$ ist $(p-1)$-Fläche (für $p \geq 2$).

11.5.14 Beispiele

(1) Anschaulich z. B. die Nordhemisphäre mit dem Äquator.

(2) Sei
$$\mathcal{F} = \left\{x \in \mathbb{R}^3\colon x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1,\ x_1 > 0, x_3 > 0\right\}.$$
Suche Parameterdarstellung für
$$\partial\overline{\mathcal{F}} = \left\{x \in \mathbb{R}^3\colon x_1^2 + x_2^2 = 1,\ x_3 = 0\, x_1 > 0\right\}.$$
Eine Parameterdarstellung für eine größere Fläche ist:
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\beta\cos\lambda \\ \cos\beta\sin\lambda \\ -\sin\beta \end{pmatrix}$$
mit $-\pi/2 < \lambda < \pi/2$ und $-\pi/2 < \beta < \pi/2$ (rechte Halbsphäre).
Setze
$$D = \{(\beta, \lambda)\colon\ -\pi/2 < \lambda, \beta < \pi/2\}$$
und
$$H = \{(\beta, \lambda)\colon \beta < 0\}$$

(3) Für $n = 3$ und $p = 3$:
Sei
$$\mathcal{F} = \left\{(x_1, x_2, x_3)\colon x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 < 1,\ x_1, x_2, x_3 > 0\right\}$$
der positive Kugel-Oktant im $\mathbb{R}^3$ und
$$\partial\mathcal{F} = \left\{(x_1, x_2, x_3)\colon x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1,\ x_1, x_2, x_3 > 0\right\}$$

die dazugehörige Kugelabschnittsfläche.
Setze dazu

$$\mathcal{F}\colon \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos\beta\cos\lambda \\ r\cos\beta\sin\lambda \\ r\sin\beta \end{pmatrix}$$

für $0 < r < 1$, $0 < \lambda < \pi/2$ und $0 < \beta < \pi/2$. Für die große Fläche sei $0 < r < 2$.

$$\partial\mathcal{F}\colon \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\beta\cos\lambda \\ \cos\beta\sin\lambda \\ \sin\beta \end{pmatrix}$$

für $0 < \lambda < \pi/2$ un4 $0 < \beta < \pi/2$.
Setze also für $D : 0 < r < 2$, $0 < \lambda < \pi/2$ und $0 < \beta < \pi/2$ und

$$H = \{(r, \beta, \lambda)\colon r < 1\}$$

11.5.15 Definition: p-Mannigfaltigkeit, p-Fläche

Sind $\mathcal{F}_1, \ldots, \mathcal{F}_m$ verträgliche und orientierte p-Flächenstücke [mit Rand], so heißt

$$M = \mathcal{F}_1 \cup \cdots \cup \mathcal{F}_m$$

orientierte p-Mannigfaltigkeit [mit Rand, falls $\partial\mathcal{F}_i \cap \mathcal{F}_j = \emptyset$ für $i \neq j$].
Wenn $M \subseteq \mathbb{R}^n$ zusammenhängend ist, so heißt M *orientierte p-Fläche*.

11.5.16 Beispiel

$$S^{n-1} = \{x\colon \|x\| = 1\}$$

ist eine $(n-1)$-Fläche.

11.5.17 Bemerkung

$$\partial M := \partial\mathcal{F}_1 \cup \cdots \cup \partial\mathcal{F}_m$$

ist eine $(p-1)$-Mannigfaltigkeit.

Beweis Sei $\mathcal{F}_j \subseteq \tilde{\mathcal{F}}$ mit der Parameterdarstellung $\Phi_j\colon D_j \mapsto \tilde{\mathcal{F}}_j$.
Für $\mathcal{F}_j$ ist $\Phi_j\colon D_j \cap H \mapsto \mathcal{F}_j$ Parameterdarstellung mit $H = \{x\colon x_1 < 0\}$ und für $\partial\mathcal{F}_j$ ist $\Psi_j\colon \triangle_j \mapsto \partial\mathcal{F}_j$ Parameterdarstellung.
Dabei ist

$$\triangle_j = \{(u_2, \ldots, u_p)\colon (0, u_2, \ldots, u_p) \in D_j\},$$

also

$$\Psi(u_2, \ldots, u_p) = \Phi_j(0, u_2, \ldots, u_p).$$

Wir haben bisher:
$\Phi_1 = \Phi_2 \circ h$ mit $h\colon D_1 \mapsto D_2$ lokal diffeomorph.
Damit ist lokal $h(\triangle_1) \subseteq \triangle_2$, weil $h = \Phi_2^{-1} \circ \Phi_1$.
Es ist also

$$\Phi_1(u_1, u_2, \ldots, u_p) = \Phi_2(h_1(u_1, \ldots, u_p), h_2(u_1, \ldots, u_p), \ldots, h_p(u_1, \ldots, u_p)).$$

Mit $u_1 = 0$ ist

$$\begin{aligned}\Psi_1(u_2, \ldots, u_p) &= \Phi_2(0, h_2(0, u_2, \ldots, u_p), \ldots, h_p(0, u_2, \ldots, u_p)) \\ &= \Psi_2(\overline{h}(u_2, \ldots, u_p))\end{aligned}$$

mit $\overline{h} = \begin{pmatrix} h_2 \\ \vdots \\ h_p \end{pmatrix}$.

$\Rightarrow \partial\mathcal{F}_1, \partial\mathcal{F}_2$ sind verträglich.

Noch zu zeigen:

$$\det h' > 0 \overset{?}{\Longrightarrow} \det \overline{h}' > 0.$$

Es ist

$$h' = \begin{pmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial u_1} & \frac{\partial h_1}{\partial u_2} & \cdots & \frac{\partial h_1}{\partial u_p} \\ \frac{\partial h_2}{\partial u_2} & & & \\ \vdots & & \overline{h}' & \\ \frac{\partial h_p}{\partial u_1} & & & \end{pmatrix}$$

Dabei ist in $\triangle_1$

$$\frac{\partial h_1}{\partial u_2} = \cdots = \frac{\partial h_1}{\partial u_p} = 0.$$

Also gilt dann:

$$0 < \det h' = \frac{\partial h_1}{\partial u_1} \cdot \overline{h}'.$$

Ist $\frac{\partial h_1}{\partial u_1} \geq 0$? Dann ist nämlich $\det \overline{h}' > 0$.

Zeige also noch: $\frac{\partial h_1}{\partial u_1} \geq 0$:

Es ist $h_1(0, u_2, \ldots, u_p) = 0$,

$\overline{h}(\triangle_1) \subseteq \triangle_2$ und $h(D_1 \cap H) \subseteq D_2 \cap H$.

$\frac{\partial h_1}{\partial u_1} \geq 0$, weil $h_1(u_1, u_2, \ldots, u_p) < 0$ für $u_1 < 0$.

11.5.18 Zerlegung der Eins

Sei M eine kompakte p-Mannigfaltigkeit,

$$M = \mathcal{F}_1 \cup \cdots \cup \mathcal{F}_m, \quad \partial M = \partial\mathcal{F}_1 \cup \cdots \cup \partial\mathcal{F}_m.$$

Dabei sei

$$\overline{M} := M \cup \partial M \subseteq \mathbb{R}^n$$

kompakt.

Dann existieren endlich viele Kugeln $K_1, \ldots, K_s$ mit dazu gehörenden C^∞-Funktionen $\varphi_j \colon K_1 \cup \cdots \cup K_s \to \mathbb{R}$ mit $\varphi_j(x) = 0$ außerhalb von K_j und $\varphi_j > 0$ in K_j und

$$\sum_{j=1}^{s} \varphi_j(x) = 1$$

für $x \in K_1 \cup \cdots \cup K_s$.

Weiter ist $\overline{M} \subseteq K_1 \cup \cdots \cup K_s$ und zu jedem $x \in \overline{M}$, $x \in K_j$, gibt es ein $\mathcal{F}_{\nu(j)}$ mit $\overline{M} \cap K_j \subseteq \overline{\mathcal{F}_{\nu(j)}}$.

Geometrisch bedeutet das, daß es nicht erlaubt ist, daß der Schnitt von $\overline{M}$ mit K_j eine Untermenge irgendeines $\mathcal{F}_{\nu(j)}$ sein muß; es darf kein $\mathcal{F}_{\nu(k)}$ zusätzlich in K_j $(\nu(k) \neq \nu(j))$ „hineinragen“. $\mathcal{F}_{\nu(j)}$ darf aber z. B. (unter der Annahme, daß $\mathcal{F}_{\nu(j)}$ eine Kurve ist) zeitweise die Kugel K_j verlassen und danach wieder schneiden.

Beweis: Sei $x \in \overline{M}$ beliebig.
Dazu existiert eine Kugel $K(x)$ und ein ν mit $K(x) \subseteq \tilde{\mathcal{F}}_\nu$.
Da $\overline{M} \subseteq \bigcup_{x\in\overline{M}} K(x)$, gilt:

$$\overline{M} \subseteq \bigcup_{j=1}^{s} K\left(x^{(j)}\right) =: \bigcup_{j=1}^{s} K_j$$

(Satz von Heine-Borel, 7.5.11 auf Seite 197)
Dabei ist $K_j \subseteq \overline{\mathcal{F}_{\nu(j)}}$ für geeignetes $\nu(j)$.
Wenn nun $\psi \in C^\infty$ ex. mit:

1. $\psi_j(x) > 0$ in K_j,

2. $\psi(x) = 0$ in $\mathbb{R}^n \setminus K_j$,

dann setze in $K_1 \cup \cdots \cup K_s$

$$\varphi_j(x) := \frac{\psi_j(x)}{\sum\limits_{i=1}^{s} \psi_i(x)}$$

Nachweis der Existenz von ψ zu K: Setze $K = K(0,1)$ und

$$\psi(x) = \begin{cases} \exp\left(\dfrac{1}{\|x\|^2 - 1}\right) & \text{in } K(0,1) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Es ist $\psi \in C^\infty$ (Aufgabe).
Zu $K = K(\xi, r)$ gehört dann $\psi\left(\frac{x-\xi}{r}\right)$.

11.5.19 Def.: Integral von p-Form über p-Mannigfaltigkeit

Sei M eine kompakte, orientierte p-Mannigfaltigkeit, ω sei eine p-Form, definiert in der offenen Menge U, $U \supseteq \overline{M}$.
$\{\varphi_1, \ldots, \varphi_s\}$ sei eine Zerlegung der Eins.
Dann wird definiert:

$$\int\limits_M \omega := \sum_{j=1}^{s} \int\limits_{\mathcal{F}_{\nu(j)}} \varphi_j \omega$$

11.5.20 Satz

Die Definition in 11.5.19 ist unabhängig von der Zerlegung der Eins.

Beweis: Seien $\varphi_1, \dots, \varphi_s$ mit $K_1, \dots, K_s$ und $\psi_1, \dots, \psi_t$ mit $L_1, \dots, L_t$ eine Zerlegung der Eins:

$$\sum_{j=1}^{s} \int_{F_{\nu(j)}} \varphi_j \omega = \sum_{j=1}^{s} \int_{\mathcal{F}_{\nu(j)}} \sum_{i=1}^{t} \psi_i \varphi_j \omega = \sum_{j=1}^{s} \sum_{i=1}^{t} \int_{\mathcal{F}_{\nu(j)}} \psi_i \varphi_j \omega$$

$$\overset{\otimes}{=} \sum_{i=1}^{t} \int_{\mathcal{F}_{\nu(i)}} \sum_{j=1}^{s} \varphi_j \psi_i \omega = \sum_{i=1}^{t} \int_{\mathcal{F}_{\nu(i)}} \psi_i \omega$$

Wieso gilt $\otimes$?
Zu $\mathcal{F}_{\nu(j)}$ und $\mathcal{F}_{\nu(i)}$ gehören die beiden Kugeln K_j und L_i, sie können sich schneiden, müssen es aber nicht, außerdem ist $\psi_i \varphi_j = 0$ außerhalb von $K_j \cap L_i$, deshalb ist es egal über welches $\mathcal{F}$ — beide sind Obermengen der Kugeln — integriert wird.

11.6 Der Integralsatz von Stokes

11.6.1 Integralsatz von Stokes

Sei M ein C^2-Mannigfaltigkeit der Dimension p (p-Mannigfaltigkeit), ω eine $(p-1)$-Form, stetig differenzierbar in $U \supseteq M$, U offen.
Dann gilt:

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega$$

Speziell für $p = n$ ist dies der Gaußsche Integralsatz (Divergenzsatz):

$$\int_M \left(\frac{\partial b_1}{\partial x_1} + \cdots + \frac{\partial b_n}{\partial x_n} \right) \underbrace{dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n}_{(dx)} = \int_{\partial M} b_1(x)\, dx_2 \wedge \cdots \wedge dx_n$$
$$- b_2\, dx_1 \wedge dx_4 \wedge \cdots \wedge dx_n$$
$$+ \cdots + (-1)^{n+1} b_n(x)\, dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_{n-1}$$

11.6.2 Bemerkungen

(a) „C^2“-Mannigfaltigkeit:

$$M = \bigcup_{j=1}^{m} \mathcal{F}_j, \qquad \Phi_j \colon D_j \to \mathcal{F}_j$$

alle Φ_j sind zweimal stetig differenzierbar.

(b) $\partial M = \emptyset$ ist möglich. Dann ist die Aussage:

$$\int_M d\omega = 0$$

(c) Für $p = 1$ ist M eine Kurve (Bogen oder geschlossen).

$$\Phi \colon (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}^n$$

sei Parameterdarstellung von M.
Wenn M geschlossen ist, hat M keinen Rand, wenn M ein Bogen ist, sind die Endpunkte der

Rand.
ω sei eine 0-Form: $\omega = u\colon U \to \mathbb{R}$, eine Funktion. Dann ist

$$d\omega = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_j}\, dx_j.$$

Was ist

$$\int\limits_{\partial M} \omega = \cdots ?$$

$$\begin{aligned}\int\limits_{M} d\omega &= \int\limits_{M} \operatorname{grad} u(x) \cdot dx \qquad \text{„Kurvenintegral“}\\ &= u(\Phi(\beta)) - u(\Phi(\alpha)) =: \int\limits_{\partial M} \omega\end{aligned}$$

11.6.3 Beweis zum Integralsatz von Stokes, 11.6.1

Sei

$$M = \bigcup_{j=1}^{m} \mathcal{F}_j \qquad \text{(mit oder ohne Rand)}$$

und $\varphi_1, \ldots, \varphi_s$ Zerlegung der Eins.
Dann ist

$$\begin{aligned}\int\limits_{M} d\omega &= \int\limits_{M} d\left(\sum_{j=1}^{s} \varphi_j \omega\right)\\ &= \sum_{j=1}^{s} \int\limits_{M} d(\varphi_j \omega) = \sum_{j=1}^{s} \int\limits_{\mathcal{F}_{\nu(j)}} d(\varphi_j \omega)\end{aligned}$$

$\varphi_1, \ldots, \varphi_s$ ist auch Zerlegung der Eins bezüglich $\partial B \subseteq \overline{M}$:

$$\int\limits_{\partial M} \omega = \int\limits_{\partial M} \left(\sum_{j=1}^{s} \varphi_j \omega\right) = \sum_{j=1}^{s} \int\limits_{\partial \mathcal{F}_{\nu(j)}} \varphi_j \omega$$

Zeige also:

$$\int\limits_{\mathcal{F}_{\nu(j)}} d(\varphi_j \omega) = \int\limits_{\partial \mathcal{F}_{\nu(j)}} \varphi_j \omega$$

Schreibe $\mathcal{F}$ anstelle von $\mathcal{F}_{\nu(j)}$ und ω anstelle von $\varphi_j \omega$.
Dann ist zu zeigen:

$$\int\limits_{\mathcal{F}} d\omega = \int\limits_{\partial \mathcal{F}} \omega$$

Dabei ist $\omega = 0$ außerhalb einer Kugel.
Sei

$$\Phi\colon D \cap H \to \mathcal{F}, \qquad H = \{u\colon u_1 < 0\}\ \text{(z.B.)}$$

eine Parameterdarstellung von $\mathcal{F}$ mit $\Phi \in C^2(D)$.
Setze nun $\sigma := \Phi^*\omega$ und damit $d\sigma = \Phi^*(d\omega)$.
Damit ist dann

$$\int\limits_{\mathcal{F}} d\omega = \int\limits_{D\cap H} d\sigma$$

und

$$\int\limits_{\partial\mathcal{F}} \omega = \int\limits_{\triangle} \sigma$$

mit $\triangle = \partial H \cap D$.
σ ist $(p-1)$-Form im $\mathbb{R}^p$:

$$\begin{aligned}\sigma =& b_1\, du_2 \wedge \cdots \wedge du_p - b_2\, du_1 \wedge du_3 \wedge \cdots \wedge du_p \\ &+ \cdots + (-1)^{p-1} b_p\, du_1 \wedge \cdots \wedge du_{p-1} \\ d\sigma =& \left(\sum_{j=1}^{p} \frac{\partial b_j}{\partial u_j} \right) du_1 \wedge \cdots \wedge du_p\end{aligned}$$

Zu zeigen bleibt also:

$$\int\limits_{D\cap H} \frac{\partial b_j}{\partial u_j}\, du_1 \wedge \cdots \wedge du_p = (-1)^{j-1} \int\limits_{\triangle} b_j\, du_1 \wedge \cdots \wedge \widetilde{du_j} \wedge \cdots \wedge du_p$$

Der Fall $\mathbf{j = 1}$: Es ist

$$\begin{aligned}\int\limits_{D\cap H} \frac{\partial b_1}{\partial u_1}\, du_1 \wedge \cdots \wedge du_p &= \int\limits_{D\cap H} \frac{\partial b_1}{\partial u_1}\, du \\ &= \int\limits_{\triangle} \left[\int\limits_{\alpha(\overline{u})}^{0} \frac{\partial b_1}{\partial u_1}\, du_1 \right] d\overline{u} \\ &= \int\limits_{\triangle} (b_1(0,\overline{u}) - \underbrace{b_1(\alpha(\overline{u}),\overline{u})}_{=0})\, d\overline{u} \\ &= \int\limits_{\triangle} b_1(0,\overline{u})\, d\overline{u} = \int\limits_{\triangle} b_1\, du_2 \wedge du_3 \wedge \cdots \wedge du_p\end{aligned}$$

Der Fall $\mathbf{2 \leq j \leq p}$: Sei z. B. $j = p$:

$$\begin{aligned}\int\limits_{D\cap H} \frac{\partial b_p}{\partial u_p}\, du_1 \wedge \cdots \wedge du_p &= \left| \begin{matrix}\text{Fubini} \\ \mathbb{R}^p = \mathbb{R}^{p-1} \times \mathbb{R}\end{matrix} \right| \\ &= \int \left(\int\limits_{\alpha(\tilde{u})}^{\beta(\tilde{u})} \frac{\partial b_p}{\partial u_p}\, du_p \right) d\tilde{u} = 0\end{aligned}$$

$$\int\limits_{\triangle} b_p\, du_1 \wedge \cdots \wedge du_{p-1} = \int\limits_{\triangle} b_p(0, u_2, \ldots, u_p)\, du_1 \wedge \cdots \wedge du_{p-1} = 0$$

(Aufgabe!)

11.7 Oberflächenmaße

11.7.1 Definition: Gram'sche Matrix und Determinante

Sei A eine $n \times p$-Matrix, $1 \leq p \leq n$.
Dann heißt

$$A^T A$$

Gram'sche Matrix, $(p \times p)$-Matrix, und

$$\mathrm{gr}(A) := \det(A^T A)$$

heißt *Gram'sche Determinante*.

11.7.2 Bemerkungen/Beispiele

(a) Ist a^i die i-te Spalte von A ($a_i \in \mathbb{R}^n$), dann hat $A^T A$ die Einträge $a^j \cdot a^i = g_{ji} = g_{ij}$, $A^T A$ ist symmetrisch.

(b) Sei $p = 2$, A habe die 2 Spalten a und b:

$$A^T A = \begin{pmatrix} a \cdot a & a \cdot b \\ a \cdot b & b \cdot b \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{gr}(A) = \|a\|^2 \cdot \|b\|^2 - (a \cdot b)^2 \overset{\text{CSU}}{\geq} 0$$

(c) Für $n = 3$, $p = 2$ ist $\mathrm{gr}(A) = \|a \times b\|^2$ (Aufgabe!)

(d) Sei $c \in \mathbb{R}^n$ fest und

$$A = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \\ c_1 & \dots & c_n \end{pmatrix}, \qquad A^T A = \begin{pmatrix} 1 + c_1^2 & c_1 c_2 & \dots & c_1 c_n \\ c_2 c_1 & 1 + c_2^2 & \dots & c_2 c_n \\ & & \ddots & \\ c_n c_1 & \dots & c_n c_{n-1} & 1 + c_n^2 \end{pmatrix}$$

Es ist dann:

$$\mathrm{gr}(A) = 1 + c_1^2 + \dots + c_n^2 = 1 + \|c\|^2$$

Beweis zu (d): Berechnung der Eigenwerte von $A^T A$:
1 ist Eigenwert:

$$\begin{aligned} A^T A x = 1 \cdot x &\iff \sum_{j=1}^{n} c_i c_j x_j = 0 \text{ für } i = 1, \dots, n \\ &\iff c_i \cdot \sum_{j=1}^{n} c_j x_j = 0 \\ &\iff c_i (c \cdot x) = 0 \text{ für } i = 1, \dots, n \end{aligned}$$

Dies ist richtig, wenn $c \cdot x = 0$ ist.
Es gibt $(n - 1)$ linear unabhängige Lösungen von $c \cdot x = 0$.

Es gibt also die Eigenwerte $\underbrace{1,\dots,1}_{(n-1)\times}$ und den Eigenwert

$$\begin{aligned}\lambda &= \mathrm{spur}(A^TA) - (\overbrace{1+\cdots+1}^{(n-1)\times})\\ &= (1+c_1^2+\cdots+1+c_n^2) - (1+\cdots+1)\\ &= 1+c_1^2+\cdots+c_n^2\end{aligned}$$

Damit ist

$$\det(A^TA) = \underbrace{1\cdots 1}_{(n-1)\times}(1+c_1^2+\cdots+c_n^2)$$

11.7.3 Hilfssatz

(a) Es gilt: $\mathrm{gr}(A) \geq 0$. Es ist $\mathrm{gr}(A) = 0$ genau dann, wenn $a^1, a^2, \dots, a^p$ linear abhängig sind.

(b) Für eine $(p \times p)$-Matrix C gilt:

$$\mathrm{gr}(AC) = (\det C)^2 \cdot \mathrm{gr}(A)$$

Beweis

(a) mit Induktion:
$\mathbf{p = n}$: $\mathrm{gr}(A) = (\det A)^2 \geq 0$, $= 0$ genau dann, wenn $a^1, \dots, a^n$ l. a.
$\mathbf{p+1 \mapsto p}$: Sei $A = (a^1, \dots, a^p)$. Wähle $a \in \mathbb{R}^n$ so, daß $\|a\| = 1$ und $a \cdot a^i = 0$ für alle i. Setze $A' = (a^1, \dots, a^p, a)$:

$$0 \leq \mathrm{gr}(A') = \det\big((A')^TA'\big) = \mathrm{gr}(A)$$

denn

$$\det\left(\begin{pmatrix}A^T\\ a^T\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}A & a\end{pmatrix}\right) = \det\begin{pmatrix} & & & 0\\ & A^TA & & \vdots\\ & & & 0\\ 0 & \cdots & 0 & 1\end{pmatrix} = \mathrm{gr}(A)$$

Dieses ist $= 0$, wenn $a^1, \dots, a^p, a$ linear abhängig sind. Da aber a senkrecht zu allen anderen Vektoren steht müssen $a^1, \dots, a^p$ l. a. sein.

11.7.4 Definition: Oberflächenintegral

Sei $\mathcal{F}$ ein p-Flächenstück mit der Parameterdarstellung $\Phi\colon D \subseteq \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n$ und $f\colon \Phi(D) = \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ stetig. Dann heißt

$$\int\limits_{\mathcal{F}} f(x)\,do := \int\limits_D f(\Phi(u))\sqrt{\mathrm{gr}(\Phi'(u))}\,du$$

Oberflächenintegral, sofern die rechte Seite als Lebesgueintegral existiert. Insbesondere heißt

$$|\mathcal{F}| = \int\limits_{\mathcal{F}} 1\cdot do = \int\limits_{\mathcal{F}} do$$

p-dimensionaler Inhalt von $\mathcal{F}$.

11.7.5 Bemerkungen

(a) $\int\limits_{\mathcal{F}} f(x)\, do$ läßt sich mittels einer Zerlegung der Eins für Flächen bzw. Mannigfaltigkeiten erklären.

(b) Für $n = 3$, $p = 2$:
Sei $\Phi\colon D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$: dann ist
$$\operatorname{gr}(\Phi') = \|\Phi_u \times \Phi_v\|^2$$
(Übereinstimmung mit früherer Definition.)

(c) Sei nun n beliebig, $p = 1$ und
$$\Phi\colon (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}^n$$
eine Parameterdarstellung von $\mathcal{F}$ mit
$$\Phi' = \begin{pmatrix} \Phi_1' \\ \vdots \\ \Phi_n' \end{pmatrix}, \qquad \operatorname{gr}(\Phi') = \det((\Phi')^T \cdot \Phi') = \|\Phi'\|^2$$
Damit ist
$$\int\limits_{\mathcal{F}} f(x)\, do = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f(\Phi(t)) \cdot \|\phi'(t)\|\, dt$$
(Integral nach der Bogenlänge)

(d) Die Definition ist unabhängig von der Parameterdarstellung von $\mathcal{F}$:
Seien $\Phi\colon D \to \mathcal{F}$ und $\Psi\colon \triangle \to \mathcal{F}$ Parameterdarstellungen von $\mathcal{F}$.
Es gilt: $\Phi(u) = \Psi(h(u))$, mit $h\colon D \to \triangle$ diffeomorph.
Damit ist dann
$$\begin{aligned} \Phi'(u) &= \Psi'(h(u)) \cdot h'(u) \\ \operatorname{gr}(\Phi'(u)) &= \operatorname{gr}(\Psi'(h(u)) \cdot h'(u)) \\ &= \operatorname{gr}(\Psi'(h(u))) \cdot (\det h'(u))^2 \end{aligned}$$
und
$$\begin{aligned} \int\limits_D f(\Phi(u)) \sqrt{\operatorname{gr}(\Phi'(u))}\, du &= \int\limits_D f(\Psi(h(u))) \sqrt{\operatorname{gr}(\Psi'(h(u)))} \cdot |\det h'(u)|\, du \\ &\overset{\text{Trafo}}{=} \int\limits_{\triangle} f(\Psi(s)) \sqrt{\operatorname{gr}(\Psi'(s))}\, ds \end{aligned}$$

(e) Zur Motivation: Sei
$$D = \{u \in \mathbb{R}^p \colon 0 < u_j < 1 \text{ für } 1 \leq j \leq p\}$$
und $\Phi(u) = A \cdot u$ mit der $n \times p$-Matrix $A = (a^1, a^2, \ldots, a^p)$.
Damit ist $\Phi' = A$ und
$$\mathcal{F} = \Phi(D) = \left\{ \sum_{j=1}^{p} u_j a^j \colon 0 < u_j < 1 \text{ für } j = 1, \ldots, p \right\}$$
In der Geometrie des $\mathbb{R}^n$ setzt man dann
$$|\mathcal{F}| = \text{Inhalt von } \mathcal{F} = \sqrt{\operatorname{gr}(A)} = \int\limits_D \sqrt{\operatorname{gr}(A)}\, du$$
Im Fall $n = 3$, $p = 2$ ist dann $|\mathcal{F}|$ die Oberfläche des im Raum stehenden Flächenstückes $\mathcal{F}$.

11.7.6 Beispiel: Inhalt der n-dimensionalen Einheitssphäre

Die n-dimensionale Einheitsspäre ist

$$S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n, \|x\| = 1\}.$$

Suche eine explizite Darstellung für

$$S_+^{n-1} = X^{n-1} \cap \{x \colon x_n > 0\}$$

Es ist $x_n = \varphi(x_1, \dots, x_{n-1})$, genauer:

$$\Phi(u) = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_{n-1} \\ \varphi(u) \end{pmatrix}, \qquad \text{mit} u \in \mathbb{R}^{n-1},\ \|u\| < 1$$

Damit ist

$$\Phi'(u) = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ & & 1 \\ \varphi_{u_1} & \cdots & \varphi_{u_{n-1}} \end{pmatrix}$$

$$\operatorname{gr}(\Phi'(u)) = 1 + \|\varphi'\|^2$$

und

$$\triangle_{n-1} = \{u \colon \|u\| < 1,\ u \in \mathbb{R}^{n-1}\}$$

Also ist

$$|S^{n-1}| = \omega_n = 2 \cdot |S_+^{n-1}| = 2 \int\limits_{\triangle_{n-1}} \frac{du}{\sqrt{1 - \|u\|^2}}$$

Außerdem ist

$$\begin{aligned} \varphi(u) &= \sqrt{1 - \|u\|^2} = \sqrt{1 - u_1^2 - \cdots - u_{n-1}^2} \\ \varphi'(u) &= -\frac{1}{2\sqrt{1 - \|u\|^2}} \cdot (-2u_1, -2u_2, \dots, -2u_{n-1}) \\ \|\varphi'\|^2 &= \frac{1}{1 - \|u\|^2} \|u\|^2 \\ 1 + \|\varphi'\| &= \frac{1}{1 - \|u\|^2} \end{aligned}$$

1. Sei nun $n = 2$:

$$\omega_2 = 2 \cdot \int\limits_{-1}^{1} \frac{du}{\sqrt{1 - u^2}} = 2\pi$$

2. und nun $n \mapsto n + 1$:

$$\omega_{n+1} = 2 \cdot \int\limits_{\triangle_n} \frac{dx}{\sqrt{1 - \|x\|^2}} = \left| \begin{array}{c} \text{mit} \\ y = (x_1, \dots, x_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1} \\ r = x_n \in \mathbb{R} \\ -1 < r < 1 \\ \|y\|^2 < 1 - r^2 \\ \text{und Fubini} \end{array} \right|$$

$$= \int_{-1}^{1} \int_{\|y\|<\sqrt{1-r^2}} \frac{dy}{\sqrt{1-r^2-\|y\|^2}}\, dr = \left| \begin{array}{c} \text{Transformation:} \\ y = \sqrt{1-r^2}\xi \\ dy = (1-r^2)^{(n-1)/2}\, d\xi \\ \|y\|^2 = (1-r^2)\|\xi\|^2 \end{array} \right|$$

$$= 2\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-r^2}} \left(\int_{\triangle_{n-1}} \frac{(1-r^2)^{(n-1)/2}}{\sqrt{1-\|\xi\|^2}}\, d\xi \right) dr$$

$$= 2\int_{-1}^{1} (1-r^2)^{(n/2)-1}\, dr \int_{\triangle_{n-1}} \frac{d\xi}{\sqrt{1-\|\xi\|^2}}$$

Daraus folgt also:

$$\omega_{n+1} = \omega_n \cdot 2 \int_0^1 (1-r^2)^{\frac{n}{2}-1}\, dr$$

Wenn nun substituiert wird mit $r = \sin t$, $dr = \cos t\, dt$, dann gilt folgende Rekursionsformel:

$$\omega_{n+1} = \left[2 \int_0^{2\pi} (\cos t)^{n-1}\, dt \right] \cdot \omega_n$$

mit $\omega_2 = 2\pi$.

11.7.7 Gaußscher Integralsatz oder Divergenzsatz [klassische Form]

Sei $G \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Gebiet, ∂G sei der topologische Rand von G. G wird aufgefaßt als n-Fläche, ∂G als $(n-1)$-Mannigfaltigkeit.
Sei nun w ein Vektorfeld, stetig differenzierbar in einer offenen Menge $\supseteq \overline{G}$. Dann gilt:

$$\int_G \operatorname{div} w\, dx = \int_{\partial G} w \cdot \nu\, do$$

Dabei ist

$$\operatorname{div} w = \frac{\partial w_1}{\partial x_1} + \cdots + \frac{\partial w_n}{\partial x_n},$$

ν ist die „äußere“ Normale: $\nu \in \mathbb{R}^n$, $\|\nu\| = 1$, $\nu(x) \perp T_x \partial G$.
„äußere“ heißt: $x - t\nu(x) \in G$ für $0 < t < \delta$, „ν zeigt nach außen“.

Beweis (Idee): Mit Hilfe des Satzes von Stokes für $p = n$:
Für

$$\omega = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j-1} w_j\, dx_1 \wedge \cdots \wedge \tilde{dx_j} \wedge \cdots \wedge dx_n$$

wird

$$\int_G d\omega = \int_{\partial G} \omega$$

auszurechnen sein.