

# 12 Fourierreihen und -Transformationen<sup>1</sup>

## 12.1 $L^p$ -Räume

### 12.1.1 Vorbemerkungen

Generell sei  $E \subseteq \mathbb{R}^n$  meßbar und

$$f: E \rightarrow \mathbb{C}, \quad f = u + iv, \quad u, v: E \rightarrow \mathbb{R}$$

$f$  heißt meßbar [integrierbar], wenn  $u$  und  $v$  meßbar [integrierbar] sind.

Man setzt

$$\int_E f(x) dx := \int_E u(x) dx + i \int_E v(x) dx$$

Es gelten die üblichen Regeln, insbesondere (wie bei Riemann):

$$\left| \int f \right| \leq \int |f|$$

### 12.1.2 Definition: Der $L^p$ -Raum

(a) Für  $1 \leq p < \infty$  ist

$$L^p = L^p(E) := \{f: E \rightarrow \mathbb{C} \text{ meßbar, } |f|^p \text{ integrierbar}\}$$

(b)

$$L^\infty = L^\infty(E) := \left\{ f: E \rightarrow \mathbb{C} \text{ meßbar, es ex. eine Nullmenge } N \text{ mit } \sup\{|f(x)|: x \in E \setminus N\} < \infty \right\}$$

Man setzt

$$\|f\|_p := \left( \int_E |f(x)|^p dx \right)^{1/p}$$

und

$$\|f\|_\infty := \inf\{A > 0: |f(x)| \leq A \text{ in } E \setminus N, N \text{ Nullmenge}\}$$

### 12.1.3 Bemerkungen und Beispiele

(a) Für  $m(E) < \infty$  und  $p < q \leq \infty$  gilt:  $L^q \subsetneq L^p$

**Beweis:** Für  $q = \infty$ : Dann ist  $f$  und damit auch  $|f|^p$  beschränkt, zusammen mit  $m(E) < \infty$  folgt dann:

$$\int |f|^p \text{ existiert.}$$

Sei nun  $p < q < \infty$ ,  $f \in L^q$ : Es ist dann

$$\|f\|^p \leq 1 + \|f\|^q \text{ (Majorante).}$$

Daraus folgt:  $f \in L^p$ .

---

<sup>1</sup>Version 179 vom 13. Februar 2006

(b) **Beispiel:** Sei

$$E = \{x: \|x\| < 1\}, \quad f(x) = \|x\|^{-\alpha} \text{ für } \alpha > 0.$$

Damit ist ( $\otimes$ : Kugelkoordinaten)

$$\begin{aligned} \int_E |f(x)|^p dx &= \int_E \|x\|^{-\alpha p} dx \\ &\stackrel{\otimes}{=} \text{const} \cdot \int_0^1 r^{-\alpha p + n - 1} dr \end{aligned}$$

Dieses Integral existiert genau dann, wenn

$$-\alpha p + n - 1 > -1 \iff \alpha p < n$$

(c) Für  $m(E) = +\infty$  existiert keine Relation zwischen  $L^p$  und  $L^q$  (siehe Beispiel unter (d)).

(d) **Beispiel:** Sei

$$E = \{x: \|x\| > 1\}, \quad f(x) = \|x\|^{-\alpha}.$$

Damit ist

$$f \in L^p \iff \alpha p > n$$

#### 12.1.4 Höldersche und Minkowskische Ungleichung

(a) Seien  $1 < p < \infty$ ,  $1 < q < \infty$  mit  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$  (Konjugierte Zahlen).

Dann gilt für  $f \in L^p$ ,  $g \in L^q$ :

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \cdot \|g\|_q \quad (12.1)$$

(Höldersche Ungleichung)

(b) Für  $f \in L^1$ ,  $g \in L^\infty$  gilt (12.1) ebenfalls. ( $p = 1$ ,  $q = \infty$ )

(c) Sei  $f \in L^p$ ,  $g \in L^p$  mit  $1 \leq p \leq +\infty$ . Dann gilt

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$$

**Beweis:**

(a) Die Gleichung (12.1) ist richtig, falls  $f(x) \cdot g(x) = 0$  f. ü., sonst sei

$$\|f\|_p = A > 0, \quad \|g\|_q = B > 0.$$

Setze

$$F(x) = \frac{|f(x)|}{A}, \quad G(x) = \frac{|g(x)|}{B}.$$

Sei  $x$  fest: Es ist  $F(x) > 0$ ,  $G(x) > 0$ .

Dann gilt

$$\begin{aligned} F(x) &= e^{s/p}, & (s &= p \log F(x)) \\ G(x) &= e^{t/q}, & (t &= q \log G(x)) \end{aligned}$$

Mit  $\oplus$  als Aufgabe gilt dann:

$$\begin{aligned} F(x)G(x) &= e^{s/p+t/q} \\ &\stackrel{\oplus}{\leq} \frac{1}{p}e^s + \frac{1}{q}e^t \\ &= \frac{1}{p}(F(x))^p + \frac{1}{q}(G(x))^q \end{aligned}$$

Zusammen ist dann

$$\begin{aligned} \int_E F(x)G(x) dx &\leq \frac{1}{p} \underbrace{\int_E (F(x))^p dx}_{=1} + \frac{1}{q} \underbrace{\int_E (G(x))^q dx}_{=1} = 1 \\ &\iff \frac{1}{AB} \int_E |f(x)g(x)| dx \leq 1 \\ &\iff \|fg\|_1 \leq \|f\|_p \cdot \|g\|_q \end{aligned}$$

(b) Es ist

$$|f(x)g(x)| \leq |f(x)| \cdot \|g\|_\infty \text{ f. ü.}$$

also

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_1 \cdot \|g\|_\infty$$

(c) Beweis hier nur für  $1 < p < \infty$ . ( $p = 1, \infty$  als Aufgabe.)

Wähle  $q$  so, daß  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ . Es ist

$$\begin{aligned} |f+g|^p &\leq (|f|+|g|)^p = (|f|+|g|)(|f|+|g|)^{p-1} \\ \int \underbrace{|f|}_{\in L^p} \underbrace{(|f|+|g|)^{p-1}}_{\in L^{q??}} &\leq \|f\|_p \cdot \|(|f|+|g|)^{p-1}\|_q \end{aligned}$$

Hierbei ist

$$\|(|f|+|g|)^{p-1}\|_q = \left( \int (|f|+|g|)^{(p-1)q} \right)^{1/q}$$

Aus  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$  folgt  $(p-1)q = p$ . Damit ist dann

$$\|(|f|+|g|)^{p-1}\|_q = \left( \int (|f|+|g|)^p \right)^{\frac{1}{q}}$$

Zusammen folgt:

$$\int (|f|+|g|)^p \leq (\|f\|_p + \|g\|_p) \left( \int (|f|+|g|)^p \right)^{\frac{1}{q}}$$

Mit  $\frac{1}{q} = 1 - \frac{1}{p}$  folgt

$$\begin{aligned} \|(|f|+|g|)\|_p &\leq \|f\|_p + \|g\|_p \\ \Rightarrow \|f+g\|_p &\leq \| |f| + |g| \|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p \end{aligned}$$

Jetzt bleibt noch zu zeigen: Ist  $(|f|+|g|)^{p-1} \in L^q$ ?

$$(|f|+|g|)^{(p-1)q} = (|f|+|g|)^p \leq 2^p \underbrace{\max(|f|^p, |g|^p)}_{\in L^1} \in L^1$$

**12.1.5 Bemerkung**

Für  $p = 2$  ist in Gleichung (12.1)  $q = 2$  und sie lautet dann

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_2 \cdot \|g\|_2$$

$$\left| \int_E f(x)g(x) dx \right|^2 \leq \left( \int_E |f(x)g(x)| dx \right)^2 \leq \left( \int_E |f(x)|^2 dx \right) \cdot \left( \int_E |g(x)|^2 dx \right)$$

Dies ist die *Cauchy-Schwarzsche Ungleichung*. Normalerweise wird sie auf der linken Seite mit  $\overline{g(x)}$  statt  $g(x)$  geschrieben.

**12.1.6 Satz:  $L^p$  ist ein Vektorraum**

$L^p$  ist ein Vektorraum über  $\mathbb{C}$ , und  $\|\cdot\|_p$  hat die Eigenschaften

(1)  $\|f\|_p \geq 0$ , „ $= 0$ “, genau dann, wenn  $f(x) = 0$  f. ü.

(2)  $\|\lambda f\|_p = |\lambda| \|f\|_p$

(3)  $\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$

**12.1.7 Bemerkung**

Wegen (1) ist  $\|\cdot\|_p$  *keine* Norm, heißt aber  $p$ -Norm oder  $L^p$ -Norm.

**12.1.8 Definition: Konvergenz im  $L^p$** 

Eine Folge  $(f_k)$  in  $L^p$  heißt *konvergent in  $L^p$*  gegen  $f \in L^p$ , wenn  $\|f_k - f\|_p \rightarrow 0$  für  $k \rightarrow \infty$ .

**kurz:**  $f_k \rightarrow f$  oder  $\lim_{k \rightarrow \infty} f_k = f$ .

**Achtung:**  $f_k \rightarrow f$  ist etwas anderes als  $f_k(x) \rightarrow f(x)$  für  $x \in E$ .

**12.1.9 Satz von Riesz-Fischer**

$L^p$  ist vollständig, d. h. jede Cauchyfolge in  $L^p$  konvergiert in  $L^p$ .

(Cauchyfolge bedeutet: Zu jedem  $\varepsilon > 0$  ex. ein  $k_0 \in \mathbb{N}$  mit  $\|f_k - f_l\| < \varepsilon$  für alle  $k > l \geq k_0$ .)

**Beweis:** Bemerkung: Aus  $f_k \rightarrow f$  in  $L^p$  folgt, daß  $(f_k)$  wie immer eine Cauchyfolge ist.

Sei  $(f_k)$  Cauchyfolge in  $L^p$  mit  $1 \leq p < \infty$  ( $p = \infty$  als Aufgabe).

Setze nun  $\varepsilon = 2^{-j}$ . Finde dazu ein  $k_j$  mit

$$\|f_k - f_l\|_p < 2^{-j} \text{ für } k > l > k_j, \quad (j = 1, 2, \dots)$$

OBdA sei  $k_1 < k_2 < k_3 < \dots$ .

Sei nun  $E$  meßbar und  $F \subseteq E$  mit endlichem  $m(F)$ :

$$\begin{aligned} \int_F 1 \cdot |f_k(x) - f_l(x)| dx &\stackrel{\text{Hölder}}{\leq} (m(F))^{1/q} \cdot \left( \int_F |f_k(x) - f_l(x)|^p dx \right)^{1/p} \\ &\leq (m(F))^{1/q} \|f_k - f_l\|_p \\ &\leq (m(F))^{1/q} \cdot 2^{-j}, \text{ falls } k > l \geq k_j \end{aligned}$$

Mit Beppo-Levi folgt dann:

$$\sum_{j=1}^{\infty} (f_{k_{j+1}}(x) - f_{k_j}(x))$$

konvergiert fast überall in  $F$ , also fast überall in

$$E = \bigcup_{k=1}^{\infty} \underbrace{E \cap [-k, k]^n}_{=: F_k \text{ mit } m(F_k) < \infty}.$$

Setze nun

$$f(x) := f_{k_1}(x) + \sum_{j=1}^{\infty} (f_{k_{j+1}}(x) - f_{k_j}(x)) = \lim_{j \rightarrow \infty} f_{k_j}(x) \text{ f. ü.}$$

(sonst setze  $f(x) = 0$ .)

Da  $\|f_k\|_p \leq \text{const}$  (Wie bei jeder Cauchyfolge).

$f \in L^p$ : Lemma von Fatou:

$$\int_E |f(x)|^p dx \leq \liminf_{j \rightarrow \infty} \int_E |f_{k_j}(x)|^p dx < \infty$$

Zeige nun, daß  $f_{k_j} \rightarrow f$  in  $L^p$ :

$$\int_E |f(x) - f_{k_j}(x)|^p dx \leq \liminf_{l \rightarrow \infty} \int_E |f_{k_l}(x) - f_{k_j}(x)|^p dx$$

d. h.:

$$\|f - f_{k_j}\|_p \leq \liminf_{l \rightarrow \infty} \|f_{k_l} - f_{k_j}\|_p \leq 2^{-j}$$

Also konvergiert die Teilfolge  $(f_{k_j})$  gegen  $f$  in  $L^p$ .

Sei nun  $k > k_j$ . Dann gilt:

$$\|f - f_k\|_p \leq \underbrace{\|f - f_{k_j}\|_p}_{\leq 2^{-j}} + \underbrace{\|f_{k_j} - f_k\|_p}_{\substack{< 2^{-j} \\ \text{nach Def. von } k_j}} < 2^{-j+1}$$

Also:  $f_k \rightarrow f$  in  $L^p$ .

### 12.1.10 Zusatz

Konvergiert die Folge  $(f_k)$  gegen  $f$  in  $L^p$ , so gibt es eine Teilfolge  $(f_{k_j})$  mit  $f_{k_j}(x) \rightarrow f(x)$  f. ü. für  $j \rightarrow \infty$ .

### 12.1.11 Beispiel

Betrachtet wird der Raum  $L^2([0, 2\pi])$ .

Sei  $(c_k)$  eine Folge in  $\mathbb{C}$  mit  $k = -\infty, \dots, \infty$  und die Reihe

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2$$

konvergiere. Setze dann

$$f_n(x) := \sum_{k=-n}^n c_k e^{ikx} \quad (\text{trigonometrisches Polynom})$$

Zeige:  $(f_n)$  ist Cauchyfolge: Sei  $n > m$  und  $\varepsilon > 0$ . Dann gilt:

$$\begin{aligned}\|f_n - f_m\|_2^2 &= \left\| \sum_{m < |k| \leq n} c_k e^{ikx} \right\|_2^2 = \int_0^{2\pi} \left| \sum_{m < |k| \leq n} c_k e^{ikx} \right|^2 dx \\ &= \int_0^{2\pi} \sum_{m < |k|, |j| \leq n} c_k \overline{c_j} e^{i(k-j)x} dx \\ &= \sum_{m < |k| \leq n} |c_k|^2 \cdot 2\pi \\ &\leq 2\pi \sum_{|k| > m} |c_k|^2 < \varepsilon^2 \text{ für } m \geq n_0\end{aligned}$$

Somit gilt also:  $f_n \rightarrow f$  in  $L^2([0, 2\pi))$ .

**Abkürzung:** Setze

$$(f, g) := \int_0^{2\pi} f(x) \overline{g(x)} dx$$

Für  $-n \leq j \leq n$  gilt dann:

$$(f_n, e^{ijx}) = \int_0^{2\pi} \sum_{k=-n}^n c_k e^{i(k-j)x} dx = 2\pi \cdot c_j$$

Daraus folgt für  $c_j$ , den  $j$ -ten Fourierkoeffizienten von  $f_n$ :

$$c_j = \frac{1}{2\pi} (f_n, e^{ijx})$$

Für die Funktion  $f$  gilt:

$$(f, e^{ijx}) = (f_n, e^{ijx}) + (f - f_n, e^{ijx}).$$

Daraus folgt dann:

$$\begin{aligned}|(f, e^{ijx}) - \underbrace{(f_n, e^{ijx})}_{=c_j}| &= |(f - f_n, e^{ijx})| \\ &\stackrel{\text{CSU}}{\leq} \|f - f_n\|_2 \cdot 2\pi \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)\end{aligned}$$

Es ist

$$\begin{aligned}c_j &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-ijx} dx \\ c_j &= \hat{f}_j \quad (\text{Analysis I})\end{aligned}$$

Die Folge  $c_j$  erzeugt  $f \in L^2$ ,  $c_j$  sind die Fourierkoeffizienten von  $f$ .

Ziel:

$$2\pi \|f\|_2 = \sqrt{\sum |c_k|^2}$$

( $\geq$  schon bewiesen mit der Besselschen Ungleichung, siehe 6.5.6 auf Seite 144).

### 12.1.12 Approximation durch stetige Funktionen

Zu beliebigem  $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ ,  $1 \leq p < \infty$ , gibt es eine Folge  $(g_k)$  von stetigen Funktionen im  $\mathbb{R}^n$  mit  $g_k \rightarrow f$  in  $L^p$ , sowie  $g_k(x) = 0$  für  $\|x\| \geq R_k$ .

**Beweis:**

(1) Es existieren Treppenfunktionen  $\varphi_k$  mit

$$\varphi_k(x) \rightarrow f(x) \text{ f. ü.}, \quad |\varphi_k(x)| \leq |f(x)| \text{ f. ü.}$$

(Aufgabe).

Da

$$|\varphi_k(x) - f(x)|^p \leq 2^p |f(x)|^p,$$

ist der Satz von Lebesgue über die majorisierte Konvergenz anwendbar und es gilt für  $k \rightarrow \infty$

$$\int \|f - \varphi_k\|_p \rightarrow 0.$$

(2) Approximation von  $\varphi = \varphi_k$  durch stetige Funktionen  $g = g_k$ :

Sei OBdA

$$\varphi(x) \begin{cases} 1 & \text{in } I = (a_1, b_1) \times \cdots \times (a_n, b_n) \\ 0 & \text{in } \mathbb{R}^n \setminus \bar{I} \end{cases}$$

In das Intervall  $I$ , in dem die Treppenfunktion  $\varphi$  gleich 1 ist, wird nun ein zweites Intervall  $J$  gelegt, dessen Ränder den Abstand  $\delta$  zum Rand von  $I$  haben. Setze nun

$$g(x) = \begin{cases} 1 & \text{in } J \\ \frac{1}{\delta} \text{dist}(x, \partial I) & \text{sonst} \\ 0 & \text{in } \mathbb{R}^n \setminus \bar{I} \end{cases}$$

Dabei ist

$$\text{dist}(x, \partial I) = \min\{\|x - y\| : y \in \partial I\}$$

$g$  ist stetig in  $\mathbb{R}^n$ ,  $g(x) = 0$  für  $\|x\| \geq R$ .

Es gilt damit dann

$$\begin{aligned} \|\varphi - g\|_p^p &= \int_{I \setminus J} \underbrace{|\varphi(x) - g(x)|^p}_{\leq 1} dx \\ &\leq 1 \cdot m(I \setminus J) < \frac{1}{k^p} \text{ für kleines } \delta > 0. \end{aligned}$$

Somit folgt dann:

$$\|\varphi_k - g_k\|_p < \frac{1}{k}, \quad \|g_k - f\| \rightarrow 0 \text{ für } k \rightarrow \infty$$

### 12.1.13 Erinnerung an Analysis I

Sei  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  eine  $2\pi$ -periodische Funktion und Riemann-integrierbar über dem Intervall  $[0, 2\pi]$ . Definiere dann den *Fourierkoeffizienten*  $\hat{f}_k$ :

$$\hat{f}_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-ikx} dx$$

Seien

$$S_n(x) := \sum_{k=-n}^n \hat{f}_k e^{ikx}$$

$$T_n(x) := \sum_{k=-n}^n c_k e^{ikx} \quad (c_k \in \mathbb{C})$$

Trigonometrische Polynome. Dann wird definiert:

$$\int_0^{2\pi} f(x) \overline{g(x)} dx =: (f, g),$$

insbesondere

$$\sqrt{(f, f)} = \|f\|_2$$

und es gelten:

(a)

$$\|f - S_n\|_2 \leq \|f - T_n\|_2 \quad \forall T_n$$

(b)

$$\|f - S_n\|_2^2 = \|f\|_2^2 - \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-n}^n |\hat{f}_k|^2$$

(c) die Besselsche Ungleichung:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\hat{f}_k|^2 \leq 2\pi \|f\|_2^2$$

### 12.1.14 Definition

Definiere

$$L_{2\pi}^2 := L^2([0, 2\pi))$$

Funktionen  $f \in L_{2\pi}^2$  werden  $2\pi$ -periodisch fortgesetzt, d. h. es gilt

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$$

Unter diesen Bedingungen gelten (a), (b) und (c) weiter.

### 12.1.15 Bemerkung

Sei

$$l^2 := \left\{ (c_k)_{k=-\infty}^{\infty} : \sum_k |c_k|^2 \text{ ist konvergent} \right\}$$

Auf diesem Raum wird die folgende Norm definiert:

$$\|(c_k)\|_2 := \sqrt{\sum_k |c_k|^2}$$

Das Skalarprodukt ist:

$$((c_k), (d_k)) = \sum_k c_k \overline{d_k}$$



Die Abbildung

$$\begin{cases} l^2 & \longrightarrow L_{2\pi}^2 \\ (c_k) & \longmapsto \sum_k c_k e^{ikx} \quad (\text{konv. in } L^2) \end{cases}$$

ist bijektiv und normerhaltend.

L. Carleson zeigte 1963: Für  $f \in L_{2\pi}^2$  gilt:

$$f(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} \hat{f}_k e^{ikx} \quad \text{f.ü.}$$

### 12.1.16 Satz

Für  $f \in L_{2\pi}^2$  gilt:

$$\begin{aligned} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{f}_k e^{ikx} &= f \quad \text{im } L^2\text{-Sinn, d.h.} \\ \|S_n - f\| &\longrightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty) \end{aligned}$$

und es gilt die *Parsevalsche Gleichung*:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\hat{f}_k|^2 = 2\pi \|f\|_2^2$$

**Beweis:** Sei  $\varepsilon > 0$ . Dann existiert:

1. eine stetige Funktion  $g: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$  mit

$$\|f - g\|_2 < \varepsilon$$

OBdA sei  $g(2\pi) = g(0)$ . Falls nicht, ändere  $g$  im Intervall  $[2\pi - \delta, \delta]$  so, daß  $\hat{g}$  hier linear ist. Dabei ist  $\hat{g}(2\pi - \delta) := g(2\pi - \delta)$  und  $\hat{g}(2\pi) := g(0)$ .

2. ein trigonometrisches Polynom  $T_m$  mit

$$|g(x) - T_m(x)| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{2\pi}} \quad \text{in } [0, 2\pi]$$

(Weierstraßscher Approximationssatz)

Sei nun  $n \geq m$ : Dann gilt:

$$\begin{aligned} \|f - S_n\|_2 &\leq \|f - T_m\|_2 \\ &\leq \|f - g\|_2 + \|g - T_m\|_2 \\ &< \varepsilon + \sqrt{\int_0^{2\pi} \frac{\varepsilon^2}{2\pi} dx} = 2\varepsilon \end{aligned}$$

d. h.  $S_n \rightarrow f$  in  $L_{2\pi}^2$ .

Aus (b) folgt:

$$\begin{aligned} \sum_{k=-n}^n |\hat{f}_k|^2 &= 2\pi \|f\|_2^2 - 2\pi \underbrace{\|S_n - f\|_2^2}_{\rightarrow 0 \ (n \rightarrow \infty)} \\ \Rightarrow \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\hat{f}_k|^2 &= 2\pi \|f\|_2^2 \end{aligned}$$

**12.1.17 Bemerkung**

Für

$$\ell_k(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ikx}$$

und  $f \in L^2_{2\pi}$  gilt:

$$\hat{f}_k = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} f(x) \overline{\ell_k(x)} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (f, \ell_k)$$

und

$$f = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_k (f, \ell_k) \ell_k \quad \text{in } L^2_{2\pi}$$

Zudem ist:

$$\frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} |(f, \ell_k)|^2 = 2\pi \|f\|_2^2$$

und

$$(\ell_k, \ell_n) = \begin{cases} 1 & k = n \\ 0 & k \neq n \end{cases}$$

**12.2 Die Fouriertransformation****12.2.1 Definition**

Für  $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$  heißt

$$\hat{f}(x) := (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} f(\xi) e^{-i\xi \cdot x} d\xi$$

*Fourier-transformierte von  $f$*  (Dabei ist  $\xi \cdot x = \xi_1 x_1 + \dots + \xi_n x_n$  das Skalarprodukt im  $\mathbb{R}^n$ ). Dabei wird die Abbildung  $\hat{\cdot}: f \mapsto \hat{f}$  definiert. Die Existenzbedingung für  $\hat{f}$  ist:

$$|f(\xi) e^{-i\xi \cdot x}| = |f(\xi)|$$

**12.2.2 Beispiele**

(1) Sei für  $\lambda > 0$

$$f(\xi) = e^{-\lambda \|\xi\|_1} = e^{-\lambda |\xi_1| - \dots - \lambda |\xi_n|}$$

Dann ist

$$\begin{aligned} (2\pi)^{n/2} \hat{f}(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} \exp \left( \sum_{k=1}^n (-\lambda |\xi_k| - i \xi_k x_k) \right) d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \left( \prod_{k=1}^n e^{-\lambda |\xi_k| - i \xi_k x_k} \right) d\xi \\ &\stackrel{\text{Fubini}}{=} \prod_{k=1}^n h(x_k) \end{aligned}$$

mit

$$h(x_k) = \int_{\mathbb{R}} e^{-\lambda |\xi_k| - i \xi_k x_k} d\xi_k$$

Berechne nun

$$\begin{aligned}
 h(u) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda|t|-itu} dt = \int_{-\infty}^0 \underbrace{e^{\lambda t - itu}}_{\substack{s=-t \\ ds=-dt}} + \int_0^{\infty} e^{-\lambda t - itu} dt \\
 &= \int_0^{\infty} e^{-\lambda s + isu} ds + \int_0^{\infty} e^{-\lambda t - itu} dt \\
 &= \frac{1}{\lambda + iu} + \frac{1}{\lambda - iu} = \frac{2\lambda}{\lambda^2 + u^2}
 \end{aligned}$$

Also ist dann:

$$\hat{f}(x) = (2\pi)^{-n/2} \cdot (2\lambda)^n \cdot \prod_{k=1}^n \frac{1}{\lambda^2 + x_k^2} = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{n/2} \prod_{k=1}^n \frac{\lambda}{\lambda^2 + x_k^2}$$

(2) Sei

$$f(\xi) = e^{-\lambda \|\xi\|^2}$$

mit

$$\|\xi\|^2 = \sum_{k=1}^n \xi_k^2.$$

Dann ist

$$\begin{aligned}
 (2\pi)^{n/2} \hat{f}(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} \exp\left(-\sum_{k=1}^n \lambda \xi_k^2 + i \xi_k x_k\right) d\xi \\
 &= \prod_{k=1}^n h(x_k)
 \end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned}
 h(u) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda t^2 - itu} dt \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\lambda \left(t + \frac{iu}{2\lambda}\right)^2 - \frac{u^2}{4\lambda}\right) dt \\
 &= \exp\left(-\frac{u^2}{4\lambda}\right) \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\lambda \left(t + \frac{iu}{2\lambda}\right)^2\right) dt \\
 &= \left| \begin{array}{l} t + i\frac{u}{2\lambda} = s \\ \text{Funktionentheorie I} \end{array} \right| \\
 &= e^{-u^2/4\lambda} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda s^2} ds \\
 &= \sqrt{\frac{\pi}{\lambda}} e^{-u^2/4\lambda}
 \end{aligned}$$

Also ist

$$\hat{f}(x) = (2\lambda)^{-n/2} \cdot e^{-\|x\|^2/4\lambda}$$

**12.2.3 Einfache Eigenschaften der Fouriertransformation**

(1)

$$|\hat{f}(x)| \leq (2\pi)^{-n/2} \|f\|_1$$

(2) Die Abbildung

$$\begin{cases} L^1 & \longrightarrow L^\infty \\ f & \longmapsto \hat{f} \end{cases}$$

ist linear, d.h.

$$\widehat{\alpha f + \beta g} = \alpha \hat{f} + \beta \hat{g},$$

und es gilt

$$\|\hat{f}\|_\infty \leq (2\pi)^{-n/2} \|f\|_1$$

(3) (a) Für  $a \in \mathbb{R}^n$  und  $g(\xi) = e^{ia\xi} f(\xi)$  ist

$$\hat{g}(x) = \hat{f}(x - a)$$

(b) Für  $a \in \mathbb{R}^n$  und  $g(\xi) = f(\xi - a)$  ist

$$\hat{g}(x) = \hat{f}(x) \cdot e^{-iax}$$

(c) Für eine reguläre  $n \times n$ -Matrix  $A$  und  $g(\xi) = f(A^{-1}\xi)$  ist

$$\hat{g}(x) = |\det A| \cdot \hat{f}(A^T x)$$

(d) Für  $g(\xi) = \overline{f(\xi)}$  ist

$$\hat{g}(x) = \overline{\hat{f}(-x)}$$

(e) Für  $g(\xi) = f(-\xi)$  ist

$$\hat{g}(x) = \hat{f}(-x)$$

**Beweis:** Auf dem Aufgabenblatt.**12.2.4 Satz von Plancherel**Für  $f, g \in L^1$  sind  $\hat{f}g, f\hat{g} \in L^1$  und es gilt:

$$\int \hat{f}g = \int f\hat{g}$$

**Beweis:** Es ist

$$\begin{aligned} (2\pi)^{n/2} \int \hat{f}(x) \cdot g(x) dx &= \int_{\mathbb{R}^n} \left( \int_{\mathbb{R}^n} f(\xi) e^{-i\xi x} d\xi \right) g(x) dx \\ &\stackrel{\text{Fubini}}{=} \int_{\mathbb{R}^n} \underbrace{\left( \int_{\mathbb{R}^n} g(x) e^{-i\xi x} dx \right)}_{=\hat{g}(\xi) \cdot (2\pi)^{n/2}} f(\xi) d\xi \\ &= (2\pi)^{n/2} \int_{\mathbb{R}^n} \hat{g}(\xi) \cdot f(\xi) d\xi \end{aligned}$$

Außerdem gilt:

$$|(\hat{f}g)(x)| \leq \underbrace{(2\pi)^{-n/2} \|f\|_\infty \cdot |g(x)|}_{\in L^1(\mathbb{R}^n)}$$

Also gilt:  $\hat{f}g \in L^1$ .

**Wieso ist oben der Satz von Fubini anwendbar?**

Nach dem Satz von Tonelli gilt:

$$\int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} |f(\xi) e^{-i\xi \cdot x} \cdot g(x)| \, d\xi \, dx = \int_{\mathbb{R}^n} |g(x)| \int_{\mathbb{R}^n} |f(\xi)| \, d\xi \, dx \text{ existiert.}$$

### 12.2.5 Satz: Stetigkeit und Differenzierbarkeit von $\hat{f}$

(a)  $\hat{f} \in C(\mathbb{R}^n)$ , d.h.  $\hat{f}$  ist stetig.

(b) Falls  $f(\xi) \|\xi\|^m$  in  $L^1$  ist, so ist  $\hat{f} \in C^m(\mathbb{R}^n)$  und für  $|\alpha| \leq m$  gilt:

$$D^\alpha \hat{f}(x) = (-i)^{|\alpha|} \widehat{\xi^\alpha f}.$$

Dabei ist

$$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}_0^n, \quad |\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$$

und

$$D^\alpha f = \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}, \quad \xi^\alpha = \xi_1^{\alpha_1} \xi_2^{\alpha_2} \dots \xi_n^{\alpha_n}$$

z.B. ist für  $\alpha = (1, 0, \dots, 0)$ :

$$\hat{f}_{x_1}(x) = -i \cdot (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} \xi_1 f(\xi) e^{-i\xi \cdot x} \, d\xi$$

**Beweis:**

(a) Setze

$$F(x, \xi) := f(\xi) e^{-i\xi \cdot x}$$

$$F: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}.$$

Ist  $\xi$  fest, dann ist  $x \mapsto F(x, \xi)$  stetig.

Ist  $x$  fest, dann ist  $|F(x, \xi)| \leq |f(\xi)|$ , integrierbar unabhängig von  $x$ .

Zusammen ist

$$\hat{f}(x) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} F(x, \xi) \, d\xi$$

als Parameterintegral stetig.

(b) Beweis durch Induktion nach  $m$ :

**m = 1:** ( $\|\xi\| \cdot f(\xi)$  integrierbar) Sei z.B.  $\alpha = (1, 0, \dots, 0)$ .

Ist  $\xi$  fest, so ist  $x \mapsto F(x, \xi)$  stetig differenzierbar nach  $x_1$

$$F_{x_1}(x, \xi) = -i\xi_1 f(\xi) e^{-i\xi \cdot x}.$$

Ist  $x$  fest, so gilt:

$$|F_{x_1}(x, \xi)| \leq \underbrace{\|\xi\| \cdot |f(\xi)|}_{\text{integrierbare Majorante}}$$

$\Rightarrow f_{x_1}$  ist stetig,  $f$  Parameterintegral, Formel gilt.

**12.2.6 Satz**

Für  $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$  ist  $\hat{f} \in C_0(\mathbb{R}^n)$ , d. h.  $\hat{f}$  ist stetig und

$$\lim_{\|x\| \rightarrow \infty} \hat{f}(x) = 0.$$

Insbesondere ist  $\hat{f}$  gleichmäßig stetig.

**Beweis:** Siehe 12.2.8 auf Seite 375.

**12.2.7 Hilfssatz**

Für  $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$  sei  $f_{(y)}(x) := f(x - y)$ . Dann ist

$$h(y) := \|f - f_{(y)}\|_p$$

gleichmäßig stetig ( $h: \mathbb{R}^n \rightarrow [0, \infty)$ )

**Beweis:** Es ist:

$$\begin{aligned} |h(y) - h(z)| &= \left| \|f - f_{(y)}\|_p - \|f - f_{(z)}\|_p \right| \leq \|f_{(y)} - f_{(z)}\|_p \\ &= \left( \int |f(x - y) - f(x - z)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \left| \begin{array}{c} x = y + \xi \\ \text{Transformationsformel} \end{array} \right| \\ &= \left( \int |f(\xi) - f(\xi - (z - y))|^p d\xi \right)^{\frac{1}{p}} = h(z - y) - h(0) \end{aligned}$$

d.h.: Zu zeigen ist die Stetigkeit im Punkt 0.

Sei also  $\varepsilon > 0$ . Dazu existiert eine stetige Funktion  $g$  mit  $\|f - g\|_p < \varepsilon$ ,  $g(x) = 0$  für  $\|x\| \geq R (= R_\varepsilon)$ .

Es existiert also ein  $\delta > 0$ , so daß für  $\|y\| < \delta < R$  gilt:

$$|g(x) - g(x - y)| \leq \begin{cases} \varepsilon (\Omega_n (2R)^n)^{-1/p} & \text{für } \|x\| < 2R \\ 0 & \text{für } \|x\| \geq 2R \end{cases}$$

Damit ist dann

$$\begin{aligned} |h(y) - h(0)| &= \|f - f_{(y)}\|_p = \|f - g + g - g_{(y)} + g_{(y)} - f_{(y)}\|_p \\ &< \varepsilon + \left( \int_{\|x\| \leq 2R} \underbrace{|g(x) - g(x - y)|^p}_{< \varepsilon^p (\Omega_n (2R)^n)^{-1}} dx \right)^{\frac{1}{p}} + \varepsilon \\ &< \varepsilon + \varepsilon (\Omega_n (2R)^n)^{-1/p} \cdot (\Omega_n (2R)^n)^{1/p} + \varepsilon \\ &= 3\varepsilon \quad \text{für } \|y\| < \delta. \end{aligned}$$

### 12.2.8 Beweis von 12.2.6

Es ist

$$\begin{aligned}(2\pi)^{n/2} \hat{f}(x) &= \int f(\xi) e^{-i\xi \cdot x} d\xi \\ &= \left| \begin{array}{c} \text{Subst.} \\ \xi = \eta - \pi \frac{x}{\|x\|^2} \end{array} \right| \\ &= \int f\left(\eta - \pi \frac{x}{\|x\|^2}\right) e^{-i\eta \cdot x} \underbrace{e^{i\pi}}_{=-1} d\eta\end{aligned}$$

Nach Addition ergibt sich:

$$\begin{aligned}\left| (2\pi)^{n/2} 2\hat{f}(x) \right| &= \left| \int \left[ f(\xi) - f\left(\xi - \pi \frac{x}{\|x\|^2}\right) \right] e^{-i\xi \cdot x} d\xi \right| \\ &\leq \int \left| f(\xi) - f\left(\xi - \pi \frac{x}{\|x\|^2}\right) \right| d\xi \\ &= \left\| f - f\left(\pi \frac{x}{\|x\|^2}\right) \right\|_1\end{aligned}$$

Zu  $\varepsilon > 0$  existiert ein  $\delta > 0$  mit

$$|\hat{f}(x)| < \text{const} \cdot \left\| f - f\left(\pi \frac{x}{\|x\|^2}\right) \right\|_1 < \varepsilon \quad \text{für} \quad \left\| \pi \frac{x}{\|x\|^2} \right\| < \delta,$$

also für  $\|x\| > \frac{\pi}{\delta}$ .

$$\Rightarrow \lim_{\|x\| \rightarrow \infty} \hat{f}(x) = 0$$

$\Rightarrow \hat{f}$  ist gleichmäßig stetig.

### 12.2.9 Ziel: Die Umkehrformel

Im weiteren soll hier gezeigt werden, daß fast überall die Umkehrformel gilt:

$$f(\xi) = (2\pi)^{-n/2} \int \hat{f}(x) e^{ix \cdot \xi} dx$$

### 12.2.10 Definition: Faltung

Für  $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$  heißt

$$f * g(x) := (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y) g(y) dy$$

*Faltung von  $f$  mit  $g$ .*

### 12.2.11 Satz: Einfache Eigenschaften der Faltung

Für  $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$  existiert  $f * g$  für fast alle  $x$  und es gilt:

$$f * g = g * f \in L^1(\mathbb{R}^n)$$

und

$$\widehat{f * g} = \hat{f} \cdot \hat{g}$$

**Beweis:** Setze für  $F: \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}$ :

$$F(x, y) := f(x - y)g(y)$$

Dann ist

$$\begin{aligned} \int \left( \int |F(x, y)| dx \right) dy &= \iint |f(x - y)| \cdot |g(y)| dx dy \\ &= \int |g(y)| \underbrace{\left( \int |f(x - y)| dx \right)}_{=\|f\|_1} dy \\ &= \|f\|_1 \cdot \|g\|_1 \end{aligned}$$

Nach dem Satz von Tonelli-Fubini gilt:

$$2(\pi)^{n/2} \cdot (f * g)(x) = \int F(x, y) dy$$

existiert für fast alle  $x$ , und  $f * g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ .

$$\begin{aligned} (2\pi)^n \widehat{f * g}(x) &= (2\pi)^{n/2} \int (f * g)(\xi) e^{-i\xi \cdot x} d\xi \\ &= \iint f(\xi - y) g(y) e^{-i\xi \cdot x} dy d\xi \\ &= \iint f(\xi - y) e^{-i(\xi - y) \cdot x} \cdot g(y) e^{-iy \cdot x} dy d\xi \\ &= \int \left[ \int f(\xi - y) e^{-i(\xi - y) \cdot x} d\xi \right] g(y) e^{-iy \cdot x} dy \\ &= (2\pi)^n \hat{f}(x) \cdot \hat{g}(x) \end{aligned}$$

(Mit der Transformation  $\xi - y = u$  in der vorletzten Zeile.)

### 12.2.12 Beispiel 1

Sei  $n = 1$  und

$$f(x) = e^{-|x|}, \quad g(x) = \begin{cases} 1 & \text{in } [a, b] \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Dann ist

$$\sqrt{2\pi}(f * g)(x) = \int_a^b e^{-|x-y|} \cdot 1 dy$$

Das ergibt 3 Fälle:

1.  $x \leq a$ :

$$\int_a^b e^{-y+x} dy = -e^{-y+x} \Big|_a^b = e^{x-a} - e^{x-b}$$

2.  $x \geq b$ :

$$\int_a^b e^{y-x} dy = e^{y-x} \Big|_a^b = e^{b-x} - e^{a-x}$$



3.  $a < x < b$ :

$$\int_a^b e^{y-x} dy + \int_x^b e^{x-y} dy = 1 - e^{a-x} + 1 - e^{x-b}$$

### 12.2.13 Beispiel 2

Sei

$$H(\xi) := e^{-\|\xi\|_1} = e^{-|\xi_1| - \dots - |\xi_n|}, \quad \lambda > 0$$

Dann gelten folgende Aussagen:

(1)

$$h_\lambda(x) := (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} H(\lambda\xi) e^{i\xi \cdot x} d\xi = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{n/2} \prod_{\nu=1}^n \frac{\lambda}{\lambda^2 + x_\nu^2}$$

(2)

$$\int_{\mathbb{R}^n} h_\lambda(x) dx = (2\pi)^{n/2}$$

(3) Für  $f \in L^1$  gilt:

$$f * h_\lambda(x) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} H(\lambda\xi) \hat{f}(\xi) e^{i\xi \cdot x} d\xi$$

(4) Wenn  $f \in L^\infty$  und stetig im Punkt  $x$  ist, dann gilt:

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} f * h_\lambda(x) = f(x)$$

**Beweis:**

1. Wie in Beispiel 1, [12.2.12](#)

2. Es ist

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} h_\lambda(x) dx &= \left(\frac{2}{\pi}\right)^{n/2} \left( \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\lambda}{\lambda^2 + t^2} dt \right)^n \\ &= \left| \begin{array}{l} t = \lambda s \\ dt = \lambda ds \end{array} \right| \\ &= \left(\frac{2}{\pi}\right)^{n/2} \left( \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\lambda^2}{\lambda^2 + \lambda^2 s^2} ds \right)^n \\ &= \left(\frac{2}{\pi}\right)^{n/2} \cdot \pi^n \\ &= (2\pi)^{n/2} \end{aligned}$$

3. Es ist

$$\begin{aligned}
 (2\pi)^{n/2} f * h_\lambda(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y) \left[ (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} H(\lambda\xi) e^{i\xi \cdot y} d\xi \right] dy \\
 &= (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} H(\lambda\xi) f(x-y) e^{-i(x-y) \cdot \xi} dy e^{ix \cdot \xi} d\xi \\
 &= (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} H(\lambda\xi) \underbrace{\left( \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y) e^{-i(x-y) \cdot \xi} dy \right)}_{\substack{\text{Transf.:} \\ u=x-y \\ dy=du}} e^{ix \cdot \xi} d\xi \\
 &= \int H(\lambda\xi) \hat{f}(\xi) e^{ix \cdot \xi} d\xi
 \end{aligned}$$

4. Ist  $f * h_\lambda$  definiert? Es ist  $|f(x-y)h_\lambda(y)| \leq \|f\|_\infty$  fast überall,  $h_\lambda(y) \in L^1$ , also ist  $f * h_\lambda$  definiert. Es gilt:

$$\begin{aligned}
 |f * h_\lambda(x) - f(x)| &= \left| (2\pi)^{-n/2} \int [f(x-y) - f(x)] h_\lambda(y) dy \right| \\
 &\leq (2\pi)^{-n/2} \int |f(x-y) - f(x)| h_\lambda(y) dy \\
 &= \left| \begin{matrix} y = \lambda\xi \\ dy = \lambda^n \xi \end{matrix} \right| \\
 &= (2\pi)^{-n/2} \int |f(x - \lambda\xi) - f(x)| \cdot \underbrace{\lambda^n \cdot h_\lambda(\lambda\xi)}_{=h_1(\xi)} d\xi
 \end{aligned}$$

Für  $\lambda_k \searrow 0$  gilt

1)

$$|f(x - \lambda_k \xi) - f(x)| h_1(\xi) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0 \text{ punktweise}$$

2)

$$|f(x - \lambda_k \xi) - f(x)| h_1(\xi) \leq (\|f\|_\infty + |f(x)|) \cdot h_1(\xi) \text{ f.ü.}$$

ist integrierbare Majorante.

Mit dem Satz von Lebesgue gilt dann:

$$h_{\lambda_k} * f(x) - f(x) \rightarrow 0 \quad \text{für } k \rightarrow \infty$$

### 12.2.14 Umkehrsatz

Ist  $f \in L^1$  und  $\hat{f} \in L^1$ , dann gilt überall dort, wo  $f$  stetig ist:

$$f(\xi) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(x) e^{ix \cdot \xi} dx$$

fast überall, wenn  $f$  stetig ist. Außerdem gilt:

$$f(-\xi) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(x) e^{-ix \cdot \xi} dx = \hat{\hat{f}}(\xi)$$

**Beweis:** Die rechte Seite sei  $g(\xi)$ ,  $g \in C_0(\mathbb{R}^n)$ . Es ist

$$f * h_\lambda(x) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} H(\lambda\xi) \hat{f}(\xi) e^{i\xi \cdot x} d\xi, \text{ vgl. HS}$$

mit

$$H(\lambda\xi) = e^{-\lambda\|\xi\|_1}$$

Hier gilt

1.)

$$H(\lambda\xi) \hat{f}(\xi) e^{i\xi \cdot x} \xrightarrow{\lambda \rightarrow 0} \hat{f}(\xi) e^{i\xi \cdot x}$$

und

2.)

$$|H(\lambda\xi) \hat{f}(\xi) e^{i\xi \cdot x}| \leq 1 \cdot |\hat{f}(\xi)| \cdot t$$

hat eine integrierbare Majorante.

Nach dem Satz von Lebesgue (angewandt auf  $f * h_{\lambda_k}$ ,  $\lambda_k \rightarrow 0$ ) gilt dann:

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} f * h_\lambda(x) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(\xi) \cdot e^{i\xi \cdot x} d\xi = g(x)$$

Da  $f$  stetig in  $x$  ist und  $f \in L^\infty$  gilt:

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} f * h_\lambda(x) = f(x)$$

Es ist

$$\begin{aligned} \|f * h_\lambda - f\|_1 &= (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} \left| \int_{\mathbb{R}^n} (f(x-y) - f(x)) \cdot h_\lambda(y) dy \right| dx \\ &\stackrel{\text{Fubini}}{\leq} (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} \left( \int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y) - f(x)| \cdot h_\lambda(y) dx \right) dy \\ &= (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} h_\lambda(y) \underbrace{\left( \int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y) - f(x)| dx \right)}_{=\|f_{(\cdot-y)} - f\|_1 =: \varphi(y) \text{ stetig}} dy \\ &= (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(y) h_\lambda(y) dy \\ &= \varphi * h_\lambda(0) \\ &\xrightarrow{\lambda \rightarrow 0} \varphi(0) \\ &= \|f_{(0)} - f\|_1 = \|f - f\| = 0 \end{aligned}$$

**Also:**

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \|f * h_\lambda - f\|_1 = 0,$$

insbesondere gilt  $f * h_{\lambda_k} \rightarrow f$  in  $L^1$  für jede Folge  $\lambda_k \rightarrow 0$ . Es existiert eine Folge  $\lambda_k \searrow 0$  mit:

$$\underbrace{f * h_{\lambda_k}(x) \rightarrow f(x)}_{(*)} \quad (k \rightarrow \infty) \text{ f.ü.}$$

Wo  $(*)$  gilt, ist:

$$f(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} f * h_{\lambda_k}(x) = g(x)$$

### 12.2.15 Bemerkungen

- (a) Ist  $f, \hat{f} \in L^1(\mathbb{R}^n)$ , so existiert ein  $g \in C_0(\mathbb{R}^n)$  mit  $f(x) = g(x)$  f.ü.  
 (b) Für die Abbildung  $\hat{\cdot}$  gilt:  $L^1(\mathbb{R}^n) \rightarrow C_0(\mathbb{R}^n)$ . Die Klasse  $S$  besteht aus allen Funktionen  $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$  mit

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^n} \|x\|^m \cdot |D^\alpha f(x)| < \infty$$

für alle  $m \in \mathbb{N}_0$  und alle  $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ .

Ein typisches Beispiel ist  $f(x) = e^{-\|x\|^2}$ . Denn es ist

$$f_{x_1} = -2x_1 f, \dots$$

### 12.2.16 Satz

Die Fouriertransformation bildet  $S$  bijektiv auf sich ab.

**Beweis:** Es ist  $S \subseteq L^1 \cap C_0$  und  $D^\alpha f \in S$  für  $f \in S$ .

- (1)  $f \in S$ . Zeige, daß daraus folgt:  $\hat{f} \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ .  
 Sei  $m \in \mathbb{N}_0$ .  $\|\xi\|^m \cdot f(\xi)$  ist integrierbar, also ist  $\hat{f} \in C^m(\mathbb{R}^n)$ , d.h.  $\hat{f} \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ .  
 (2) Sei  $f \in S$ ,  $m \in \mathbb{N}_0$ . Zeige:

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^n} \|x\|^m \cdot |\hat{f}(x)| < \infty$$

Es ist

$$\begin{aligned} -ix_1 \hat{f}(x) &= (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} f(\xi) \underbrace{\left( -ix_1 e^{-ix \cdot \xi} \right)}_{\frac{\partial}{\partial \xi_1} e^{-ix \cdot \xi}} d\xi \\ &= \left| \begin{array}{c} \text{Schreibe nun:} \\ \xi = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \bar{\xi} \end{pmatrix}, \bar{\xi} \in \mathbb{R}^{n-1} \end{array} \right| \\ &\stackrel{\text{Fubini}}{=} (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left( \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi_1, \bar{\xi}) \frac{\partial}{\partial \xi_1} e^{-i(\xi_1 x_1 + \dots + \xi_n x_n)} d\xi_1 \right) d\bar{\xi} \end{aligned}$$

Das innere Integral ist:

$$\underbrace{f(\xi_1, \bar{\xi}) \cdot e^{-i\xi \cdot x}}_{=0} \Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{\partial}{\partial \xi_1} f(\xi_1, \bar{\xi}) \right) e^{-i\xi \cdot x} d\xi_1$$

Also gilt zusammen:

$$ix_1 \hat{f}(x) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} f_{\xi_1}(\xi) e^{-i\xi \cdot x} d\xi = \widehat{f_{\xi_1}}(x)$$

Per Induktion nach  $|\alpha|$  zeigt man:

$$(ix)^\alpha \hat{f}(x) = \widehat{D^\alpha f}(x)$$

Sei  $x$  fest und  $k$  so, daß

$$\max_{j=1}^n |x_j| = |x_k|, \quad \text{d.h. } \|x\| \leq n \cdot |x_k|$$

Wähle  $\alpha = (0, \dots, 0, m, 0, \dots, 0)$  mit  $m$  an der  $k$ -ten Stelle. Dann gilt:

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{n}\right)^m \|x\|^m \cdot |\hat{f}(x)| &\leq |x_k|^m \cdot |\hat{f}(x)| \\ &\leq \left| \widehat{D^\alpha f}(x) \right| \\ &\leq \sup_{|\alpha|=m} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \|x\|^m |\widehat{D^\alpha f}(x)| \\ &\stackrel{?}{<} \infty ??? \end{aligned}$$

Wenn das „?“ gilt, gilt die Behauptung (2).

Beweis hiervon im Hilfssatz [12.2.17](#)

(3) Sei  $\beta \in \mathbb{N}_0^n$ : Betrachte (2) mit  $D^\beta f \in S$ :

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^n} \|x\|^m |D^\beta \hat{f}(x)| < \infty$$

für alle  $m$ . Daraus folgt:  $\hat{f} \in S$ .

(4) Zeige:  $\hat{\cdot}$  ist injektiv:

Sei  $\hat{f} = 0$ . Daraus folgt mit dem Umkehrsatz, daß  $f(x) = 0$  f.ü.. Da  $f$  stetig ist, gilt  $f(x) = 0$ , d.h.  $\hat{\cdot}$  ist injektiv.

(5) Zeige:  $\hat{\cdot}$  ist surjektiv. Sei  $g \in S$ ,

$$f(x) := (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} g(\xi) e^{i\xi \cdot x} d\xi \in S$$

und es ist  $\hat{f} = g$ , d.h.  $\hat{\cdot}$  ist surjektiv.

Zusammen mit (4) gilt dann:  $\hat{\cdot}$  ist bijektiv.

### 12.2.17 Hilfssatz

Sei  $m \in \mathbb{N}_0$ ,  $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$  und  $f \in S$ . Dann gilt:

$$\sup \|x\|^m \left| \widehat{D^\alpha f}(x) \right| < \infty$$

**Beweis:** Es genügt, dies für  $\alpha = (0, 0, \dots, 0)$  zu zeigen. Es ist

$$\hat{f}(x) = (2\pi)^{-n/2} \int f(\xi) e^{-i\xi \cdot x} d\xi$$

und

$$\begin{aligned} \left| (ix_k)^m \hat{f}(x) \right| &= (2\pi)^{-n/2} \left| \int \left( \frac{\partial^m}{\partial \xi_k^m} f(\xi) \right) e^{-i\xi \cdot x} d\xi \right| \\ &\leq (2\pi)^{-n/2} \int \left| \frac{\partial^m}{\partial \xi_k^m} f(\xi) \right| d\xi \\ &= c_{m,k} \leq c_m \end{aligned}$$

Also gilt für alle  $x \in \mathbb{R}^n$ :

$$\left( \frac{1}{n} \right)^m \|x\|^m \cdot |\hat{f}(x)| \leq c_m$$

(Dies gilt auch für  $D^\alpha f \in S$ , d. h. für beliebiges  $\alpha$ )

### 12.2.18 Die Wärmeleitungsgleichung

Sei  $u(x, t)$  für  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , die Temperatur im Punkt  $x$  zum Zeitpunkt  $t$ . Sei nun  $u_t = \Delta u$ :

$$u_t(x, t) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2}(x, t)$$

Zu lösen ist das *Cauchyproblem*:  $u_t = \Delta u$  für  $t > 0$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$  und den „Anfangswerten“  $u(x, 0) = f(x)$ .

**Ansatz:**

$$u(x, t) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} \hat{u}(\xi, t) e^{i\xi \cdot x} d\xi$$

Formale Rechnung liefert:

$$\begin{aligned} u_t &= (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} \hat{u}_t(\xi, t) e^{i\xi \cdot x} d\xi \\ u_{x_k x_k} &= (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} (-\xi_k^2) \hat{u}(\xi, t) e^{i\xi \cdot x} d\xi \end{aligned}$$

Damit ist dann

$$\begin{aligned} u_t - \Delta u &= (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} [\hat{u}_t(\xi, t) + \|\xi\|^2 \hat{u}(\xi, t)] e^{i\xi \cdot x} d\xi \\ &= 0, \text{ falls } [\dots] = 0 \end{aligned}$$

Dadurch entsteht ein Problem für  $\hat{u}$ :

$$\begin{aligned} \hat{u}_t(\xi, t) &= -\|\xi\|^2 \hat{u}(\xi, t) \\ \hat{u}(\xi, 0) &= \hat{f}(\xi) \end{aligned}$$

Die Lösung hiervon ist:

$$\hat{u}(\xi, t) = \hat{f}(\xi) e^{-\|\xi\|^2 t}$$

Daraus folgt dann für  $u(x, t)$ :

$$\begin{aligned} u(x, t) &= (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} \left[ \int_{\mathbb{R}^n} f(y) \cdot e^{-i\xi \cdot y} dy \right] \cdot e^{-\|\xi\|^2 t} e^{i\xi \cdot x} d\xi \\ &= (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} \left[ \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\|\xi\|^2 t} e^{-i\xi \cdot (y-x)} d\xi \right] \cdot f(y) dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} K(y-x, t) f(y) dy \end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned} K(w, t) &= (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\|\xi\|^2 t} e^{-i\xi \cdot w} d\xi \\ &= (2\pi t)^{-n/2} e^{-\|w\|^2/4t} \end{aligned}$$

Damit ist dann

$$u(x, t) = (2\pi t)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\|x-y\|^2/4t} \cdot f(y) dy. \quad (12.2)$$

Der Nachweis der Richtigkeit geschieht folgendermaßen:

1. Alles ist erlaubt, falls  $f \in S$  ist, oder
2. Verifiziere alles an (12.2). (Dies gilt, falls  $f$  stetig ist und  $|f(x)| \leq C_\varepsilon e^{\varepsilon\|x\|^2}$  für  $\varepsilon > 0$ .)

### 12.2.19 Bisherige Eigenschaften der Fouriertransformation

Bisher haben wir gezeigt, daß für die Fouriertransformation die folgenden beiden Aussagen gelten:

$$\begin{aligned} \hat{\cdot} &: L^1 \rightarrow C_0 \\ \hat{\cdot} &: S \rightarrow S \end{aligned}$$

Nun wollen wir zeigen, daß auch

$$\hat{\cdot} : L^2 \rightarrow L^2$$

gilt (nicht formelmäßig).

### 12.2.20 Hilfssatz

Für  $f \in L^1 \cap L^2$  ist  $\hat{f} \in L^2$  und  $\|\hat{f}\|_2 = \|f\|_2$ .

**Beweis:** Setze

$$\tilde{f}(x) = \overline{f(-x)} \quad \text{und} \quad g = f * \tilde{f}$$

Damit ist

$$\begin{aligned} g(x) &= (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} f(-x+y) \cdot \overline{f(y)} dy \\ &= (2\pi)^{-n/2} (f_{(x)}, f) \end{aligned}$$

1.

$$|g(x)| \stackrel{\text{CSU}}{\leq} (2\pi)^{-n/2} \|f_{(x)}\|_2 \cdot \|f\|_2 = (2\pi)^{-n/2} \|f\|_2^2$$

2.  $g \in L^1$

3.  $g$  ist gleichmäßig stetig:

$$\begin{aligned} (2\pi)^{n/2} |g(x) - g(z)| &= |(f_{(x)} - f_{(z)}, f)| \\ &\stackrel{\text{CSU}}{\leq} \|f_{(x)} - f_{(z)}\|_2 \cdot \|f\|_2 \\ &= \|f_{(x-z)} - f\|_2 \|f\|_2 \\ &\rightarrow 0 \text{ für } \|x - z\| \rightarrow 0 \end{aligned}$$

Es ist

$$g * h_\lambda(0) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} H(\lambda\xi) \hat{g}(\xi) d\xi \quad (12.3)$$

mit  $H(\xi) = e^{-\|\xi\|_1}$ .

Da  $g$  stetig ist, gilt:

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} g * h_\lambda(0) = g(0) = \|f\|_2^2.$$

Rechts in (12.3) ist für  $\lambda \rightarrow 0$ :  $H(\lambda\xi) \nearrow 1$ :  $\lambda_k \searrow 0 \Rightarrow H(\lambda_k\xi) \hat{g}(\xi) \nearrow |\hat{f}(\xi)|^2$ , also

$$\hat{g}(\xi) = |\hat{f}(\xi)|^2 \geq 0$$

Mit dem Satz von Beppo-Levi ist dann

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} \text{rechts} &= (2\pi)^{-n/2} \int |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi \\ &= (2\pi)^{-n/2} \|\hat{f}\|_2^2 \end{aligned}$$

### 12.2.21 Satz, Parsevalsche Gleichung

Die Fouriertransformation  $\hat{\cdot}$  läßt sich zu einer „linearen“ und „bijektiven“ Abbildung  $\hat{\cdot}: L^2 \rightarrow L^2$  mit

$$\|\hat{f}\|_2^2 = \|f\|_2^2 \quad \text{„Parsevalsche Gleichung“}$$

fortsetzen.

**Bemerkung:** Dabei soll heißen:

„linear“

$$\widehat{\alpha f + \beta g}(x) = \alpha \hat{f} + \beta \hat{g} \text{ f. ü.}$$

„injektiv“

$$\hat{f}(x) = \hat{g}(x) \Rightarrow f(x) = g(x) \text{ f. ü.}$$

„surjektiv“

$$g \in L^2 \Rightarrow \text{es ex. } f \in L^2: \hat{f}(x) = g(x) \text{ f. ü.}$$



**Beweis:**

(a) Fortsetzung: Sei  $f \in L^2$ . Setze

$$f_k(x) = \begin{cases} f(x) & \text{in } [-k, k]^n \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Es ist  $f_k \rightarrow f$  in  $L^2$ . Außerdem ist  $f_k \in L^1 \cap L^2$ , also ist  $\hat{f}_k$  definiert und  $\hat{f}_k \in L^2$ .  $(\hat{f}_k)$  ist Cauchyfolge in  $L^2$ , da

$$\|\hat{f}_k - \hat{f}_l\|_2 = \|f_k - f_l\|_2$$

$\Rightarrow \hat{f}_k$  konvergiert in  $L^2$ , setze

$$\hat{f} := \lim_{k \rightarrow \infty} \hat{f}_k$$

(b) Die Fortsetzung ist unabhängig von  $(f_k)$ :

Gelte  $g_k \rightarrow f$  in  $L^2$ ,  $g_k \in L^1 \cap L^2$ :

$$\|\hat{f}_k - \hat{g}_k\|_2 = \|f_k - g_k\|_2 \rightarrow 0$$

Also ist für  $k \rightarrow \infty$ :

$$\hat{f}_k \rightarrow \hat{f} = \hat{g} \leftarrow \hat{g}_k$$

Die Linearität wird als Aufgabe gestellt.

Zeige nun die Normerhaltung:

$$\|\hat{f}\|_2 = \lim_{k \rightarrow \infty} \|\hat{f}_k\|_2 \stackrel{\text{HS}}{=} \lim_{k \rightarrow \infty} \|f_k\|_2 = \|f\|_2$$

„injektiv“ Sei  $\hat{f} = 0$  (d.h.  $\hat{f}(x) = 0$  f.ü.): Für  $k \rightarrow \infty$  gilt:

$$\left. \begin{array}{llll} f_k & \rightarrow & f & \quad \|f_k\|_2 \rightarrow \|f\|_2 \\ & & & \quad \parallel \\ \hat{f}_k & \rightarrow & \hat{f} \Rightarrow & \|\hat{f}_k\|_2 \rightarrow 0 \quad (k \rightarrow \infty) \end{array} \right\} f(x) = 0 \text{ f.ü.}$$

„surjektiv“ (teilweise)

$\widehat{L^1 \cap L^2}$  ist dicht in  $L^2$ , d.h.:

Zu jedem  $g \in L^2$  gibt es  $f_k \in L^1 \cap L^2$  mit

$$\hat{f}_k \rightarrow g \text{ in } L^2$$

Dann gibt es zu  $g \in L^2$  eine Folge  $(f_k)$  in  $L^1 \cap L^2$  mit  $\hat{f}_k \rightarrow g$ .

$(f_k)$  ist eine Cauchyfolge in  $L^2$ , da  $(\hat{f}_k)$  Cauchyfolge ist, also  $f_k \rightarrow f \in L^2$ . Also gilt:

$$\hat{f} = \lim_{k \rightarrow \infty} \hat{f}_k = g \text{ in } L^2$$

also  $\hat{f}(x) = g(x)$ .

**Beweisskizze:** Skizze, daß  $\widehat{L^1 \cap L^2}$  dicht in  $L^2$  ist (Funktionalanalysis):  
Sei  $g \in L^2$  und setze

$$A = \inf \left\{ \|g - \hat{f}\|_2 : f \in L^1 \cap L^2 \right\}$$

Dann existieren  $f_k \in L^1 \cap L^2$  mit

$$\|g - \hat{f}_k\|_2 \rightarrow A$$

(1)  $(f_k)$  ist Cauchyfolge  $[\|u + v\|_2^2 + \|u - v\|_2^2 = 2\|u\|_2^2 + 2\|v\|_2^2]$ ,  $\hat{f}_k \rightarrow \hat{f}$ .

(2) Es ist  $(g - \hat{f}, \hat{h}) = 0$  für alle  $h \in L^1 \cap L^2$ .

*Idee:*

$$\|g - \hat{f}\|_2^2 \leq \|g - \hat{f} - \varepsilon e^{i\alpha} \hat{h}\|_2^2 \dots$$

$$\operatorname{Re} e^{i\alpha} (g - \hat{f}, \hat{h}) \leq 0$$

$$\Rightarrow (g - \hat{f}, \hat{h}) = 0$$

(3) Setze nun  $\hat{h}(x) = h_\lambda(x - a)$  für  $a \in \mathbb{R}^n$  und  $\lambda > 0$ . Dann ist für fast alle  $a$ :

$$h_\lambda * \overline{(g - \hat{f})}(a) = \dots = 0$$

$$\Rightarrow g - \hat{f} = 0 \text{ f. ü.}$$

$$\Rightarrow A = \|\hat{f} - g\|_2 = 0.$$